

CAPITULO III

SISTEMATIZACION Y FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRIA

I. La sistematización

Utilizaremos, en primer término, las transformaciones geométricas para lograr una división sistemática de todo el campo de la Geometría, que permita observar desde *un* punto de vista, sus diferentes partes y las relaciones que las ligan.

1. Generalidades sobre la constitución de la Geometría.

Vamos a exponer en este párrafo las mismas consideraciones desarrolladas en 1872 en nuestro «*Programa de Erlangen*» (*). Como ampliación de estas ideas, puede consultarse el artículo de *Fano*, en la Enciclopedia, titulado «Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip» (Enz. III, A. B. 4b.).

1.º Como de costumbre, utilizaremos el Análisis, *representando el conjunto de puntos del espacio, por el de ternas de valores x, y, z* . A cada transformación del espacio, le corresponde, pues, una cierta transformación de estas coordenadas. Desde los comienzos de este curso, hemos utilizado cuatro de estas

(*) «Vergleichende Betrachtungen über neue geometrische Forschungen», Erlangen, 1872; reproducido en Math. Ann., tomo 43, 1893, página 63 y siguientes, y en *F. Klein: Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, tomo I, pág. 460 y siguientes, Berlín, Springer, 1921.

transformaciones, cuya gran importancia hemos visto, que están representadas por ciertas *sustituciones lineales particulares* de x , y , z : *traslación paralela, giro alrededor del origen de coordenadas, simetría respecto del origen y homotecia respecto del origen.*

2.º La introducción de las coordenadas no tiene aquí por objeto establecer una identidad absoluta entre la Geometría y el Análisis de tres variables independientes, sino como ya se ha advertido (pág. 37 y siguientes), considerar la Geometría como el estudio de todas las relaciones entre coordenadas, que permanezcan invariables en las transformaciones lineales que acabamos de enumerar, ya se consideren éstas como cambios del sistema de coordenadas, ya como transformaciones del espacio mismo; esto es definir *la Geometría como la teoría de los invariantes en aquellas sustituciones lineales.* En cambio, las propiedades representadas por relaciones no invariantes entre las coordenadas, por ejemplo, decir que un punto tiene las coordenadas 2, 5, 3, se refieren sólo a un sistema de coordenadas fijado de una vez para siempre, y pertenecen a la *Topografía*, o si se quiere a la *Geografía*, ciencia que individualiza cada punto para estudiar sus propiedades. Para mejor comprender esto, recordemos algunos *ejemplos de propiedades geométricas*: dos puntos determinan una *distancia*, una vez fijada la unidad; esto significa que con sus coordenadas (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , se puede construir una expresión

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$

que es invariante en todas las sustituciones lineales, o que a lo sumo queda multiplicada por un factor independiente de la posición especial de los puntos. Análogos significados tienen las afirmaciones de que «dos rectas determinan un *ángulo*», que «una cónica tiene *ejes y focos*», etc.

El conjunto de todas estas propiedades geométricas, lo designaremos con el nombre de «*Geometría métrica*», para diferenciarla de otras «*especies de Geometrías*», cuyas características estudiamos a continuación, que se obtendrán escogiendo

con arreglo a un cierto principio determinados teoremas de Geometría métrica y razonando sobre ellos.

3.º Muchos teoremas expresan propiedades que son invariantes en las *transformaciones afines*, es decir, en sustituciones lineales enteras de la forma :

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \end{aligned} \right\}$$

de las cuales son casos particulares, las traslaciones, giros, etcétera ; tomando el conjunto de todos los conceptos y propiedades invariantes en toda transformación afín, su conjunto constituye una nueva clase de Geometría, la llamada *Geometría afín* o *teoría de los invariantes de las transformaciones afines*.

De nuestro conocimiento de las transformaciones afines, podemos tomar ya inmediatamente conceptos y propiedades de esta Geometría ; por ejemplo, en ella carecen de sentido los conceptos de distancia y ángulo, así como la distinción entre circunferencia y elipse y la existencia de ejes en una cónica. En cambio, se conservan todas las propiedades que se refieren a *elementos impropios* del espacio, tales como el *paralelismo*, la clasificación de las cónicas en *elipses*, *hipérbolas* y *parábolas* y los conceptos de *centro*, *diámetro* y *diámetros conjugados* de una cónica.

4.º Más generales aún son las *transformaciones proyectivas*, puesto que están definidas por funciones lineales fraccionarias, de la forma :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \\ y' &= \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \\ z' &= \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \end{aligned}$$

que comprenden como caso particular a las afines

Las propiedades geométricas invariantes en estas transfor-

maciones, lo serán también, seguramente, en las afines, y, por tanto, pertenecen a la Geometría afín; separadamente de ésta deberá, pues, considerarse la *Geometría proyectiva como teoría de los invariantes de las transformaciones proyectivas*. El paso progresivo de la Geometría métrica a la afín y a la proyectiva puede compararse con el estudio químico de una substancia, aplicándola reactivos cada vez más poderosos, con lo cual se van descubriendo en ella los elementos más y más sencillos que la integran, hasta llegar a los cuerpos simples; nuestros reactivos son aquí las transformaciones métricas, primero, las proyectivas después.

En la Geometría proyectiva desaparecen los conceptos de elementos impropios y todos los de la Geometría afín que con ellos se relacionan, tales como el criterio de distinción entre las cónicas, cuyas tres especies quedan reducidas a *una sola*. Se conserva, en cambio, por ejemplo, todo lo referente a la *teoría de la polaridad*, y la *generación de una cónica por medio de haces proyectivos*.

5.º Utilizando el mismo principio de generalización y siempre partiendo de la Geometría métrica, se llega a otras especies de Geometría; una de las más importantes es la de la *Geometría de los radios vectores recíprocos*, que comprende el conjunto de propiedades de la Geometría métrica invariantes en todas las *transformaciones por radios vectores recíprocos*; así, pues, en ella, los conceptos de recta y plano carecen de significado propio, quedando reducidos a simples casos particulares de los de *circunferencia y esfera*.

6.º Continuando el mismo proceso, se obtiene, finalmente, el *Análisis situs* o conjunto de propiedades invariantes en todas las transformaciones biunívocas y continuas.

El significado de las sucesivas generalizaciones que esquemáticamente acabamos de exponer, se precisa aun más con la introducción del *concepto de grupo*. Diremos que un *conjunto de transformaciones forman un grupo*, cuando al mismo conjunto pertenecen las transformaciones producto de dos cualesquiera de ellas y las inversas de cada una.

Así, por ejemplo, tanto las *movimientos* como las *colineaciones*, forman grupo, porque aplicando dos movimientos o dos

colineaciones, se obtienen, respectivamente, un nuevo movimiento o colineación, y en ambos casos la transformación inversa de cada una es también un movimiento o una colineación, respectivamente.

Fijándonos en las distintas especies de Geometrías de que hemos hablado, se ve que las transformaciones que definen cada una de ellas, forman un grupo. Desde luego, todas las sustituciones lineales que dejan invariables las relaciones que caracterizan la Geometría métrica, a saber: las traslaciones, los giros, las simetrías y las semejanzas; este grupo suele ser designado como *grupo principal de las transformaciones del espacio*. Con la misma facilidad se reconoce que forman el *grupo afin* todas las *afinidades* y el *grupo proyectivo* todas las colineaciones, que, respectivamente, caracterizan a la *Geometría afin* y a la *proyectiva*. Los teoremas de la *Geometría de los radios vectores recíprocos* subsisten en todas las transformaciones producto de dos cualesquiera de las de esta especie por las sustituciones del grupo principal; todas ellas forman el grupo de los «*radios vectores recíprocos*». Finalmente, el *Análisis situs* puede considerarse definido por el *grupo de todas las transformaciones biunívocas y continuas*.

Veamos ahora de cuántos parámetros independientes depende cada operación de uno de estos grupos. En el grupo principal están los movimientos, con seis parámetros, que añadiendo otro para el cambio de unidad hacen un total de *siete*, por cuya causa se denota el *grupo principal* por G_7 . Las ecuaciones de la transformación afin general contienen $3 \cdot 4 = 12$ coeficientes arbitrarios, y las de la proyectiva $4 \cdot 4 = 16$, pero las ecuaciones de esta última tienen un factor común que puede suprimirse; los respectivos grupos, se designan, pues, por G_{12} y G_{15} . El grupo de los *radios vectores recíprocos* es, sin que nos detengamos a ver por qué, G_{10} y el de las *deformaciones continuas* que definen el *Análisis situs* G_∞ , pues depende de funciones arbitrarias, o si se quiere, de un número infinito de parámetros.

En las relaciones que existen entre las diferentes clases de Geometría y los grupos que acabamos de señalar, sólo se advierte un *principio fundamental* capaz de caracterizar todas las

Geometrías posibles, y es el que constituye la idea directriz del «Programa de Erlangen», que puede enunciarse así: *Dado un grupo cualquiera, arbitrario, de transformaciones del espacio, del cual forme parte el grupo fundamental, la teoría de invariantes de este grupo constituye una Geometría particular determinada; y así pueden obtenerse todas las Geometrías.*

En la literatura matemática, este principio no aparece aplicado por completo más que a los tres casos enunciados en nuestro esquema, y de ellos, por ser los más importantes y conocidos, vamos a decir algo, fijándonos de un modo particular en el paso de uno a otro.

Para ello, procederemos en orden inverso a como anteriormente lo hemos hecho, partiendo del grupo G_{15} de todas las transformaciones proyectivas, que tiene por ecuaciones homogéneas:

$$(1) \quad \begin{cases} \rho' \xi' = a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + d_1 \tau \\ \rho' \eta' = a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + d_2 \tau \\ \rho' \zeta' = a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta + d_3 \tau \\ \rho' \tau' = a_4 \xi + b_4 \eta + c_4 \zeta + d_4 \tau \end{cases}$$

Para pasar de este grupo al de las transformaciones afines, basta observar que una proyectividad es afín, cuando el plano del infinito es doble, o sea, cuando a todo punto, para el cual sea $\tau=0$, corresponda otro con $\tau'=0$. Para ello es preciso que $a_4=b_4=c_4=0$, condición que llevada a las ecuaciones (1) y pasando a coordenadas no homogéneas da:

$$(2) \quad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \end{cases}$$

que son las ecuaciones de la afinidad. *La condición de que el plano del infinito permanezca invariable separa, pues, del grupo proyectivo G_{15} un «subgrupo» G_{12} que es el denominado grupo afín.*

Análogamente, para pasar ahora al grupo principal G_7 , basta imponer la condición de que además del plano del infinito,

sea doble la curva esférica del infinito, es decir, que los puntos cuyas coordenadas satisfagan a las ecuaciones

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0, \quad \tau = 0$$

se transformen en otros que también las satisfagan. En efecto, esta condición determina, salvo un factor constante, la seis constantes (en coordenadas homogéneas), de la cónica homóloga de aquella curva esférica en una afinidad en el plano $\tau' = 0$, y por consiguiente, hay que prescindir de 6-1 constantes de la afinidad, lo cual deja reducidos los parámetros de ésta a $12 - (6 - 1) = 7$, que son los del grupo G_7 .

Estas consideraciones llevaron en 1859 al gran geómetra inglés *A. Cayley*, a una conclusión contraria a lo que entonces se pensaba, que la Geometría afín y la proyectiva no eran más que ramas más pobres de la métrica; por el contrario, esas consideraciones hicieron posible a Cayley sentar que, *tanto la Geometría afín como la métrica pueden considerarse como casos particulares de la proyectiva*: «*projective Geometry is all Geometry*» (*).

Esta afirmación que a primera vista puede parecer paradójica se justifica sin más que advertir lo que sucede al agregar a las figuras estudiadas los conceptos de *plano del infinito* y *curva esférica impropia*; entonces, *las propiedades métricas y las afines de una figura no son otra cosa que las propiedades proyectivas de la figura así ampliada*.

Para esclarecer esto, nos serviremos de dos ejemplos sencillos. Recordamos en primer lugar, que decir que dos rectas son paralelas no tiene significado alguno en Geometría proyectiva, pero lo adquiere con la adjunción del plano del infinito al conjunto de las dos rectas, pues entonces lo que se hace es aplicar simplemente la propiedad, proyectiva pura, de que dos rectas dadas en un plano se cortan en un plano determinado. Lo mismo ocurre con una recta perpendicular a un plano. En Geometría proyectiva la perpendicularidad carece de sentido, pero por medio de la curva esférica impropia se puede convertir

(*) «A sixth memoir upon quantities» Cayley. Phil. Trans. of the K. S. of London 1859. Collected. mathem papers II (Cambridge, 1889).

en una propiedad proyectiva; en efecto: el hecho de que un plano y una recta sean perpendiculares equivale a que las trazas P_∞ de la recta (fig. 98) y G_∞ del plano sobre el plano del infinito, sean respectivamente polo y polar, respecto de la curva esférica.

La sistematización de la Geometría se debe en su mayor parte a los ingleses; en primer lugar, al ya mencionado Cayley, y después a Sylvester y Salmon. Los estudios de estos dos últimos a partir de 1850, han tenido por resultado la creación de una nueva parte del Algebra, denominada en sentido estricto «Teoría de los invariantes de las sustituciones lineales y ho-

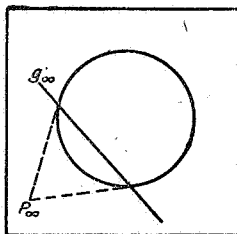


Figura 98

mogéneas» que, unida al principio de Cayley, ha permitido una sistematización completa de la Geometría basada en el Análisis. Para comprenderlo bien, es necesario decir algo acerca de esta teoría de los invariantes.

2. Sobre la teoría de los invariantes de las sustituciones lineales.

En el estudio de esta teoría, nos limitaremos a exponer las ideas fundamentales y los resultados más importantes, sin entrar en demostraciones ni descender a detalles. Entre las publicaciones dedicadas a este asunto, merece mencionarse ante todo, el trabajo de *W. Franz Meyer*, titulado «*Die Fortschritte der projektiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert*» incluido en el tomo primero del «*Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung*» (1892), así como la memoria del mismo autor, «*Invariantentheorie*» (Enzyklopädie, tomo I,

B. 2). La parte geométrica de la teoría, puede encontrarse en los libros de *Salmon* (*), y en las lecciones de *A. Clebsch* (**) publicadas por *Lindemann*.

Para dar una idea de la teoría, imaginemos:

1.º Un número cualquiera de variables dadas; según que sean dos, tres, cuatro, ... hablaremos de un *campo* o *dominio* binario, ternario, cuaternario, ... respectivamente. Si nos limitamos a los tres primeros casos, y suponemos que estas variables representan coordenadas homogéneas en una recta, un plano o un espacio, las designaremos por

$$\xi, \tau; \quad \xi, \eta, \tau; \quad \xi, \eta, \zeta, \tau.$$

donde $\tau=0$ caracteriza siempre el elemento del infinito, punto, recta o plano.

2.º Consideramos los *grupos de todas las sustituciones lineales y homogéneas de estas variables*, pero teniendo en cuenta no sólo sus razones (como después haremos en la Geometría proyectiva), sino sus valores mismos. Estas sustituciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi' = a_1 \xi + d_1 \tau \\ \tau' = a_4 \xi + d_4 \tau \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \xi' = a_1 \xi + b_1 \eta + d_1 \tau \\ \eta' = a_2 \xi + b_2 \eta + d_2 \tau \\ \tau' = a_3 \xi + b_3 \eta + d_3 \tau \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \xi' = a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + d_1 \tau \\ \eta' = a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + d_2 \tau \\ \zeta' = a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta + d_3 \tau \\ \tau' = a_4 \xi + b_4 \eta + c_4 \zeta + d_4 \tau \end{array} \right.$$

El número de parámetros de los tres grupos es 4, 9 y 16, respectivamente.

En lo sucesivo, para poder hablar independientemente del número de dimensiones, escribiremos sólo los términos correspondientes a las variables ζ y τ , poniendo puntos suspensivos entre ellos; y bastará prescindir de ellos, si se trata de un campo binario; intercalar los términos análogos en η para el

(*) «*Analytische Geometrie*»: I der Kegelschnitte; II der höheren ebenen Kurven; III des Raumes; IV. Vorl. über die Algebra der linearen Transformationen. Trad. al alemán de W. Fiedler, Leipzig (Teubner).

(**) «*Vorlesungen über Geometrie*», publicadas por F. Lindemann. Leipzig. Teubner, 1.ª Aufl. 1876. 2.ª Aufl. 1906.

ternario ; y los en τ, ζ para el cuaternario ; hablaremos, pues, en general, de las variables

$$\xi, \dots, \tau$$

y de las sustituciones lineales en ellas :

$$(1) \quad \begin{cases} \xi' = a_1 \xi + \dots + d_1 \tau \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tau' = a_4 \xi + \dots + d_4 \tau \end{cases}$$

3.º En cuanto al objeto de la *teoría de los invariantes*, se pueden distinguir *dos categorías de cuestiones* ; para la primera supongamos *dados varios sistemas de valores* :

$$\xi_1, \dots, \tau_1 ; \quad \xi_2, \dots, \tau_2 ; \quad \xi_3, \dots, \tau_3 ; \quad \dots$$

que, siguiendo la costumbre de la Geometría, designaremos abreviadamente como puntos 1 ; 2 ; 3 ; ... Aplicaremos las sustituciones del grupo (1) a cada uno de estos sistemas de valores y el problema estriba en *hallar las relaciones entre estos sistemas, tales que sean invariantes en todas estas sustituciones simultáneas*.

4.º En la segunda categoría del problema, entran además de los puntos, *funciones de las variables*, y especialmente *funciones racionales* ; se puede limitar a la consideración de funciones racionales, enteras, *homogéneas*, que son las llamadas *formas* en la teoría de invariantes, porque debido a la homogeneidad de las sustituciones, pueden ser sustituidos, sin más, los términos de igual dimensión. Así, consideraremos *formas lineales* :

$$\varphi = \alpha \xi + \dots + \delta \tau$$

las *formas cuadráticas* :

$$f = A \xi^2 + \dots + 2 G \xi \tau + \dots + K \tau^2$$

y así sucesivamente. También estudiaremos los sistemas constituidos por varias formas de la misma dimensión y entonces las distinguiremos con índices ; por ejemplo :

$$\varphi_1 = \alpha_1 \xi + \dots + \delta_1 \tau ; \quad \varphi_2 = \alpha_2 \xi + \dots + \delta_2 \tau, \dots$$

y también *forman con varios sistemas de variables*, tales como las bilineales:

$$f = A \xi_1 \xi_2 + \dots + \Delta \xi_1 \tau_2 + \dots + N \tau_1 \xi_2 + \dots + \Pi \tau_1 \tau_2$$

Para comprender la significación del problema general de la teoría, es preciso ver primero cómo se transforman los coeficientes de estas formas, aplicándolas las sustituciones del grupo (1), con la condición de que no varíen los valores de las formas φ, f .

Sea en primer lugar la forma lineal, y pongamos:

$$\varphi = \alpha \xi + \dots + \delta \tau = \alpha' \xi' + \dots + \delta' \tau'$$

Sustituyendo en lugar de ξ', \dots, τ' los valores dados por las (1), las variables $\xi \dots \tau$ deberán satisfacer a la identidad:

$$\begin{aligned} \alpha \xi + \dots + \delta \tau &\equiv \alpha' (a_1 \xi + \dots + d_1 \tau) + \dots + \delta' (a_4 \xi + \dots + d_4 \tau) \equiv \\ &\equiv (\alpha' a_1 + \dots + \delta' a_4) \xi + \dots + (\alpha' d_1 + \dots + \delta' d_4) \tau \end{aligned}$$

de la cual resulta:

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha = a_1 \alpha' + \dots + a_4 \delta' \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta = d_1 \alpha' + \dots + d_4 \delta' \end{cases}$$

Los nuevos coeficiente α', \dots, δ' de la forma lineal están pues, relacionados con los primitivos α, \dots, δ , por medio de una *sustitución también lineal*, que puede obtenerse fácilmente de la (1) cambiando en el cuadro de los coeficiente de ésta, las filas en columnas («trasposición» de la sustitución), y las variables antiguas (no acentuadas) por las nuevas (acentuadas). La sustitución que así resulta, recibe el nombre de *contragrediente* de la primera, y los sistemas de valores $\xi_1 \dots \tau_1; \xi_2 \dots \tau_2$, etcétera, el de *variables cogredientes*.

En la *forma cuadrática*, los términos de segundo grado $\xi^2, \dots, \xi, \tau \dots \tau^2$, se convierten por medio de la sustitución (1) en:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi'^2 &= a_1^2 \xi^2 + \dots + 2 a_1 d_1 \xi \tau + \dots + d_1^2 \tau^2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \xi' \tau' &= a_1 a_4 \xi^2 + \dots + (a_1 d_4 + a_4 d_1) \xi \tau + \dots + d_1 d_4 \tau^2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \tau'^2 &= a_4^2 + \dots + 2 a_4 d_4 \xi \tau + \dots + d_4^2 \tau^2 \end{aligned} \right.$$

Estas ecuaciones indican que los términos cuadráticos sufren, junto con las variables, una sustitución lineal y homogénea, que resulta inmediatamente de la (1). Ahora bien; como f es una forma lineal de dichos términos cuadráticos, resulta, repitiendo razonamientos anteriores; que *los coeficientes* $A, \dots, 2G, \dots, K$ *se transforman de un modo lineal, homogéneo y contragradiente respecto de la sustitución (3) de los términos* $\xi^2, \dots, \xi\eta, \dots, \tau^2$; es decir, que las ecuaciones entre $A, \dots, 2b, \dots, K$ y $A', \dots, 2b', \dots, K'$ se obtienen de las (3), de la misma manera que las (2) se obtienen de las (1).

5.º Después de estas consideraciones previas, podemos ya enunciar el *problema general de la teoría de invariantes*. Dado un sistema de puntos $1; 2; \dots$, y otro de formas lineales, cuadráticas, ... (o de orden superior) $\varphi_1; \varphi_2; \dots; f_1; f_2; \dots$, se llama INVARIANTE toda función de las coordenadas $\xi_1, \dots, \tau_1; \xi_2, \dots, \tau_2; \dots$ y de los coeficientes $\alpha_1, \dots, \delta_1; \alpha_2, \dots, \delta_2; \dots; A_1, \dots, K_1; A_2, \dots, K_2; \dots$, tal, que permanezca invariable en todas las sustituciones lineales (1) de las variables, y en las correspondientes sustituciones del sistema de coeficientes. El objeto de la teoría es *estudiar el conjunto de todos los invariantes posibles*.

En la literatura matemática, se acostumbra emplear todas las denominaciones de *covariante* y *contravariante*, a ciertos casos particulares de las formas que hemos llamado invariantes. Cuando las expresiones invariantes contienen los sistemas de variables $\xi_1, \dots, \tau_1; \xi_2, \dots, \tau_2; \dots$, se dice que son *covariantes*; y cuando contienen los coeficientes $\alpha_1, \dots, \delta_1; \alpha_2, \dots, \delta_2; \dots$ de las formas lineales, se dice que son *contravariantes*; y se reserva el nombre de *invariante* para designar las que no contienen las coordenadas ξ_1, \dots ni los coeficientes α_1, \dots , sino que están formadas con los coeficientes de formas cuadráticas o de grado superior. La razón de establecer esta distinción entre los dos primeros casos, poniéndolos como opuestos, es que los sistemas de variables ξ_1, \dots, τ_1 , de una parte, y los de coeficientes α, \dots, δ , de la otra, se comportan de maneras recíprocas en cierto modo: si a los unos se les aplica una sustitución lineal, los otros sufren una transformación que es precisamente la contragradiente de aquella, cualquiera que sea el sistema del

cual se parte ; de toda formación invariante, constituida por magnitudes de uno de los dos sistemas, se puede, pues, deducir fácilmente otra formada por magnitudes del segundo. Esta dependencia equivale geoméricamente al *principio de correlación*, puesto que considerando ξ, \dots, τ como coordenadas de puntos, α, \dots, δ son coordenadas homogéneas de rectas o de planos. Por lo demás, la distinción de dos casos, según que una expresión contenga los sistemas de valores ξ, \dots, τ o los α, \dots, δ , no tiene importancia esencial, por lo cual nosotros prescindiremos de ella, empleando en general la denominación de «invariante» en el sentido amplio.

6.º Vamos a precisar más este concepto de invariante en otro sentido a fin de poder construir ordenadamente su teoría. En adelante sólo consideraremos como invariantes, *funciones racionales de las coordenadas y de los coeficientes* que, además, sean *homogéneas* en las coordenadas de cada punto y en los coeficientes de cada forma.

Cada una de estas funciones puede ser considerada como *cociente de dos funciones racionales, enteras y homogéneas*, y para ser invariante no es absolutamente preciso que lo sean los dos términos que forman la fracción, ya que el valor de ésta no cambia multiplicando ambos por un factor común ; la condición que deberán cumplir es que en toda sustitución lineal puedan multiplicarse por un cierto factor.

Puede demostrarse que este factor ha de depender sólo de los coeficientes de la sustitución, y es necesariamente una *potencia del determinante de la sustitución* :

$$r = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & d_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_4 & \dots & d_4 \end{vmatrix}$$

Se llega así, finalmente, a la conclusión de que es preciso considerar *funciones enteras racionales y homogéneas, tales que en todas las sustituciones lineales de los coeficientes y de las variables, queden multiplicadas por una potencia r^k del determinante de la sustitución*. Estas funciones reciben el nombre de *invariantes relativos*, porque no varían esencialmente, y no va-

rían en absoluto para todas las sustituciones en las cuales es $r=1$. El exponente λ de dicha potencia se llama *peso del invariante*. En oposición a los invariantes ahora considerados, todos aquellos que de una manera general hemos llamado hasta aquí invariantes se denominan *absolutos*; de modo que *todo invariante absoluto es un cociente de dos invariantes relativos del mismo peso*.

7.º Estas consideraciones permiten emprender la *sistematización de la teoría de invariantes*. Los invariantes relativos más sencillos son polinomios del *menor grado posible* en los sistemas de magnitudes dados, y de ellos se puede partir para llegar a los de grado superior. En efecto; sean j_1 y j_2 dos de aquellos invariantes; el producto de potencias $j_1^{x_1}$ y $j_2^{x_2}$ es otro invariante relativo, porque al aplicar la sustitución vendrá multiplicado por $r^{x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2}$, puesto que sus factores quedan multiplicados por r^{λ_1} y r^{λ_2} , respectivamente. Formando una suma de términos de esta naturaleza multiplicados por factores constantes:

$$\sum_{(x_1, x_2, \dots)} e_{x_1 x_2} \dots j_1^{x_1} j_2^{x_2} \dots$$

se obtendrá un nuevo invariante relativo siempre que todos los sumados vengán siempre multiplicados por la misma potencia de r , es decir, sean *isobáricos* o del mismo peso, y el grado será mayor.

El *problema fundamental* de la teoría, consiste en saber si de este modo se pueden obtener *todos* los invariantes: ¿Cuál es en cada caso determinado el sistema completo de invariantes de menor grado por cuyo medio pueden construirse todos los invariantes relativos de la manera indicada? El teorema fundamental dice así: *Dado un sistema de magnitudes cualesquiera en número finito, le corresponde siempre un «sistema completo finito de invariantes», es decir, un número finito de invariantes de los cuales se pueden deducir todos los demás mediante operaciones racionales y enteras*. Este resultado, que es definitivo para la sistematización de la teoría de invariantes,

se debe a las investigaciones de *P. Gordan* y *D. Hilbert*; sobre todo es de señalar una *Memoria* de este último (*).

Para aclarar la significación de las precedentes consideraciones abstractas, vamos a presentar algunos *ejemplos sencillos*, que mostrarán cómo intervienen los invariantes en Geometría, si bien limitándonos más a referencias que a demostraciones.

1. Dado un cierto número de puntos de un dominio binario, definidos por sus coordenadas:

$$\xi_1, \tau_1; \xi_2, \tau_2; \xi_3, \tau_3; \dots$$

se verifica este interesante teorema: *Los determinantes de segundo orden que se pueden formar con las coordenadas, no solamente son los invariantes más sencillos, sino que constituyen el sistema completo de invariantes.*

En efecto; con las coordenadas de dos puntos 1, 2, se puede formar el determinante de segundo orden:

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \tau_2 \end{vmatrix}$$

que es una función entera, racional y homogénea, tanto respecto de ξ_1, τ_1 como de ξ_2, τ_2 . Su invariancia se comprueba fácilmente, pues teniendo en cuenta la regla de multiplicación de determinantes, se puede escribir.

$$\begin{aligned} \Delta'_{12} &= \begin{vmatrix} \xi'_1 & \tau'_1 \\ \xi'_2 & \tau'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \xi_1 + d_1 \tau_1 & a_4 \xi_1 + d_4 \tau_1 \\ a_1 \xi_2 + d_1 \tau_2 & a_4 \xi_2 + d_4 \tau_2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_4 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \tau_2 \end{vmatrix} = r \cdot \Delta_{12} \end{aligned}$$

Lo cual prueba también que el invariante es de *peso uno*.

Con las coordenadas de n puntos 1, 2, ..., n , se pueden,

(*) «Über die Theorie der algebraischen Formen». Math. Annalen. Bd. 36, pág. 473 y sig. (1890).

por lo tanto, formar, $\frac{n(n-1)}{2}$ invariantes de peso uno, de la forma :

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} \xi_i & \tau_i \\ \xi_k & \tau_k \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

Prescindiremos, porque nos llevaría demasiado lejos, de la demostración de la segunda parte del teorema, que dice que estos determinantes constituyen el sistema completo de invariantes, o lo que es lo mismo, que *todo invariante relativo de los n puntos, puede representarse por una suma*

$$\Sigma C \cdot \Delta_{ik}^s \Delta_{cm}^t \dots$$

de términos isobáricos. De los invariantes relativos se obtienen los absolutos más generales, como cocientes cuyo numerador y denominador tienen el mismo peso. Un ejemplo sencillo de invariante absoluto será, pues, el cociente $\frac{\Delta_{ik}}{\Delta_{1n}}$.

El ejemplo da ocasión para citar un concepto sumamente importante en la teoría, que es el *sizygia* (*) (es decir, *reunión o asociación de invariantes*). Puede, en efecto, ocurrir que algunos polinomios formados con estos invariantes fundamentales se anulen; así, por ejemplo, en el caso de cuatro puntos se verifica la identidad

$$\Delta_{12} \Delta_{34} + \Delta_{13} \Delta_{42} + \Delta_{14} \Delta_{23} = 0$$

conocida de la teoría de determinante, y que ocasionalmente hemos utilizado ya (pág. 43). Una identidad de esta naturaleza entre invariantes del sistema completo recibió el nombre de *sizygia*.

Dadas varias *sizygias*, se pueden obtener otras por adición y multiplicación de las mismas, y se presenta aquí el mismo problema que en los invariantes, de la existencia de un *sistema completo de sizygias*, es decir, de un sistema tal, que de él

(*) Del griego $\sigma\nu\zeta\nu\gamma\omicron\varsigma$ = junto.

pueden deducirse todas las sizygias posibles por medio de sumas y multiplicaciones. La teoría demuestra que siempre hay un *sistema finito completo de sizygias*. En el caso de cuatro puntos, el *sistema completo* se reduce a la ecuación anterior, es decir, todas las identidades que pueden formarse con los seis determinantes $\Delta_{12}, \dots, \Delta_{34}$ son consecuencias de aquella. Si los puntos son más, el sistema está constituido por todas las ecuaciones del tipo de la anterior.

El conocimiento de estas *sizygias* es de capital importancia para el del sistema completo de invariantes, porque si dos sumas isobáricas de invariantes simples, se diferencian solamente en términos que tienen como factor el primer miembro de una sizygia, son idénticas y no necesitan ser contadas dos veces.

2. Análogamente, *dados varios puntos diferentes de un mismo dominio ternario o cuaternario*, los sistemas completos de invariantes estarán dados, respectivamente, por los *determinantes de tercero o cuarto orden de las coordenadas de los puntos*. Así, por ejemplo, en el ternario, el invariante fundamental de tres puntos, es:

$$\Delta_{1,2,3} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \tau_3 \end{vmatrix}$$

cuyo peso es también igual a la unidad. El lector puede deducir fácilmente todos los demás y, en particular, las sizygias.

3. Ascendamos ya a la consideración de una *forma cuadrática*, por ejemplo, en el *campo cuaternario*:

$$f = A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\zeta + 2E\eta\zeta + F\zeta^2 + 2G\xi\tau + 2H\eta\tau + 2I\zeta\tau + K\tau^2$$

Podemos, en primer lugar, formar *un invariante* que dependa sólo de los coeficientes A, ..., K, que es el *determinante*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D & G \\ B & C & E & H \\ D & E & F & I \\ G & H & I & K \end{vmatrix}$$

Como A, \dots, K se transforman contragredientemente respecto de los términos cuadráticos en ξ, \dots, τ , se comprueba fácilmente que el *peso de este invariante es -2*:

$$\Delta' = r^{-2} \cdot \Delta$$

El sistema completo de invariantes formados exclusivamente con los coeficientes $A \dots K$, está constituido sólo por el determinante Δ ; es decir, todo invariante racional y entero, que no contenga más que los coeficientes A, \dots, K , es una potencia de Δ . Si, además de los coeficientes, consideramos ahora las coordenadas ξ, η, ζ, τ de un punto, el *invariante común más sencillo*, o, empleando la terminología expuesta, el *covariante* está constituido por la misma forma f , porque la condición de su invariación determina las transformaciones de A, \dots, K . Toda forma f dada es, pues, su propio covariante y como, por definición, permanece invariable en todas las sustituciones es un invariante de peso 0, es invariante absoluto.

Tomando ahora dos puntos $\xi_1 \dots, \tau_1$ y ξ_2, \dots, τ_2 , aparece como nuevo covariante la expresión:

$$A \xi_1 \xi_2 + B (\xi_1 \tau_2 + \xi_2 \tau_1) + C_1 \tau_2 + \dots + K \tau_1 \tau_2$$

que recibe el nombre de *forma polar*. Su peso es también nulo, siendo, por lo tanto, un *invariante absoluto*.

Por último, si al mismo tiempo que f se considera una forma lineal φ , es decir, el conjunto de sus coeficiente $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, resulta el siguiente *invariante simultáneo de peso -2*:

$$\begin{vmatrix} A & B & D & G & \alpha \\ B & G & E & H & \beta \\ D & E & F & I & \gamma \\ G & H & I & K & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \end{vmatrix}$$

que se obtiene orlando Δ con los coeficientes α, \dots, δ . Esta forma, que, según lo anterior, puede llamarse *contravariante*, desempeña un importante papel en Geometría analítica, cuando se trata de representar una cuádrica en coordenadas de planos, lo

cual tiene su fundamento como puede verse, en el proceso puramente analítico de la formación de invariantes.

Si se toman *dos formas lineales* φ_1 y φ_2 de coeficientes $\alpha_1, \dots, \delta_1$ y $\alpha_2, \dots, \delta_2$ orlando dos veces el mismo determinante se obtiene *otro invariante* :

$$\begin{vmatrix} A & B & D & G & \alpha_1 & \alpha_2 \\ B & C & E & H & \beta_1 & \beta_2 \\ D & E & F & I & \gamma_1 & \gamma_2 \\ G & H & I & K & \delta_1 & \delta_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

también *de peso* — 2. Estos pocos ejemplos bastan ya para poderse formarse una cierta idea del extenso campo de la teoría de invariantes, en la que se han hecho derroches de ingenio para encontrar procedimientos que permitan construir el sistema completo de invariantes y sizygias correspondiente a un sistema de formas fundamentales dadas.

Obsérvenos, para terminar, que, en los ejemplos citados, los invariantes han sido obtenidos siempre formando determinantes, lo que hace que se considere la *teoría de determinantes como fundamento de la de invariantes*. Esta relación indujo a Cayley a dar a estos últimos el nombre de *hiperdeterminantes*. La denominación de *invariantes* que en la actualidad se usa, fué introducida posteriormente por Sylvester.

Es digna de observarse la importancia que tiene la teoría de determinantes en el conjunto general de la Matemática. Cayley llegó a asegurar que si tuviese que incluir en quince lecciones la Matemática entera, necesitaría dedicar *una* a los determinantes. El mismo autor de este libro los emplea cada vez más en sus lecciones elementales. Existe para ello una razón de índole pedagógica que le ha enseñado la experiencia, y es que los alumnos se acostumbran fácilmente al empleo de esquemas, porque les permite prescindir de los mil enojosos detalles y particularidades a que da lugar el operar con expresiones largas y complicadas; el lector mismo encontrará ocasión de convencerse con el ejemplo de esta teoría de invariantes, en la cual no puede prescindirse de los determinantes.

Pasemos ya a la aplicación de estas consideraciones a nuestro objeto fundamental, el lograr una sistematización de la Geometría.

3. Aplicaciones de la teoría de invariantes a la Geometría.

En este párrafo consideraremos las variables ξ, \dots, τ como coordenadas rectangulares no homogéneas; serán, por consiguiente, dos ξ, τ , en el plano; tres ξ, η, τ en el espacio ordinario; cuatro ξ, η, ζ, τ en el de cuatro dimensiones. Las sustituciones lineales homogéneas de la teoría de invariantes,

$$(1) \quad \begin{cases} \xi' = a_1 \xi + \dots + d_1 \tau \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tau' = a_4 \xi + \dots + d_4 \tau \end{cases}$$

representarán, por lo tanto, el conjunto de todas las transformaciones afines en las que el origen de coordenadas permanece fijo. Según esto, los invariantes relativos deben ser magnitudes geométricas invariantes en dichas transformaciones (excepto un factor constante), y por serlo gozarán de especial significación en la Geometría afín. Así, por ejemplo, dados los puntos 1, 2, en el plano, el invariante fundamental Δ_{12} representa el doble del área del triángulo (0, 1, 2) con el signo que le corresponde, con arreglo a lo dicho en el capítulo primero. En efecto, el área del triángulo sometida a una transformación afín, queda multiplicada únicamente por el determinante de la sustitución, o dicho de otro modo, Δ_{12} es un invariante relativo de peso igual a uno. En cambio el cociente de dos áreas $\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{34}}$, y la ecuación $\Delta_{12}=0$, son invariantes absolutos, porque el factor constante desaparece simplificando el quebrado, y puede suprimirse en la ecuación, dividiendo por él. La invariancia absoluta de la ecuación $\Delta_{12}=0$, es también evidente geoméricamente, ya que representa tres puntos 0, 1, 2, en línea recta.

Sean ahora varios puntos 1, 2, 3, 4, ... (fig. 99). El sistema completo de sus invariantes consta de todos los determinantes Δ_{ik} ; luego toda magnitud geométrica función racional entera

de las coordenadas de estos puntos, que haya de permanecer invariable en las transformaciones afines, es decir, *que tengan alguna significación en esta Geometría*, debe poder ser representada analíticamente por un *polinomio en los Δ_{ik}* . Esta afirmación es fácil de comprobar geoméricamente en algunos casos; así, por ejemplo, el área de un polígono, por ejemplo (1, 2, 3, 4),

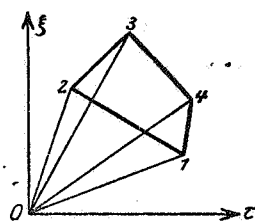


Figura 99

debe ser invariante, y, en efecto, su expresión analítica es (página 13):

$$(1, 2, 3, 4) = \Delta_{12} + \Delta_{23} + \Delta_{34} + \Delta_{41}.$$

Vamos a tratar, por último, de las sizygias entre invariantes. La fundamental

$$\Delta_{12} \Delta_{34} + \Delta_{13} \Delta_{42} + \Delta_{14} \Delta_{23} = 0$$

es una identidad, cuyo primer miembro está constituido por las áreas de los seis triángulos que pueden formarse con cuatro puntos cualesquiera y el origen de coordenadas, y representa, por lo tanto, un teorema general de Geometría afín. Como lo mismo ocurre con todas las sizygias, debe verificarse, recíprocamente, que todo el teorema de Geometría afín tenga por expresión analítica una relación entre invariantes de las transformaciones afines, o sea, una sizygia. Según lo dicho antes (página 188) del *sistema completo de las sizygias*, en el caso de cuatro puntos, todos los teoremas válidos en Geometría afín para un sistema de cuatro puntos, deben poder ser reducidos del sistema completo de sizygias. Análogamente se ve que mediante *el sistema completo de invariantes y el de sizygias*, la

teoría de invariantes permite una enumeración sistemática y completa de todas las magnitudes y teoremas posibles en la Geometría afín.

La teoría de invariantes puede ser también aplicada, del mismo modo que a las figuras formadas por puntos, a las construídas por las formas

$$\varphi = \alpha \xi + \delta \tau, \quad f = A \xi^2 + 2 G \xi \tau + K \tau^2, \dots, \text{etc.}$$

Una forma de esta especie hace corresponder a cada punto un valor numérico, es decir, determina un *campo escalar*; y así es fácil ver la significación geométrica de los invariantes de una forma dada, y a toda sizygia entre los invariantes le corresponderá también una propiedad geométrica.

La interpretación que en Geometría hemos dado hasta ahora a la teoría de invariantes, descansa en el hecho de considerar las n variables como coordenadas rectangulares no homogéneas. Considerándolas como *coordenadas homogéneas en un espacio de $n-1$ dimensiones* E_{n-1} se obtienen resultados esencialmente distintos, como vamos a exponer.

En otro lugar (pág. 115 y sig.), hemos estudiado ya las relaciones que pueden establecerse entre las coordenadas de E_{n-1} y las de E_n . Considerando E_{n-1} como la forma $(n-1)$ dimensional lineal $\tau=1$ de E_n , y proyectando sus puntos desde el origen de coordenadas sobre E_n , resultaba que todos los sistemas de valores posibles de las coordenadas homogéneas de un punto de E_{n-1} son idénticos a las coordenadas ordinarias de los puntos correspondientes a aquél en E_n . Ahora bien, las sustituciones lineales de las variables homogéneas en E_{n-1} , representan todas las *transformaciones proyectivas*, de tal manera que todas las sustituciones de la forma:

$$\begin{aligned} \rho' \xi' &= a_1 \xi + \dots + d_1 \tau \\ \dots\dots\dots \\ \rho' \tau' &= a_n \xi + \dots + d_n \tau \end{aligned}$$

que difieren solamente en un factor arbitrario ρ' , representan una misma transformación. Por consiguiente, el *grupo de las transformaciones proyectivas* no contiene ya n^2 , sino n^2-1 cons-

tantes arbitrarias. En los casos particulares de E_2 y E_3 , el número de constantes 8 y 15, respectivamente.

Al trata de interpretar geoméricamente la teoría de invariantes de las n variables ξ, \dots, τ en la Geometría proyectiva de E_{n-1} , se observa en primer lugar, que por la aplicación de las coordenadas homogéneas solamente se puede hallar significación geométrica a aquellas magnitudes y relaciones que además de ser *homogéneas de grado cero* respecto de las coordenadas ξ, \dots, τ , lo sean también respecto de todo sistema de coeficientes de una forma lineal, cuadrática, etc.

Quedará aclarado todo esto con algunos ejemplos concretos, y bastará referirnos al *campo binario* ($n=2$); supongamos pues, dos variables ξ y τ , y consideremos las razones $x = \frac{\xi}{\tau}$, como abscisas en una recta. Dados los pares de valores ξ_1, τ_1 ; ξ_2, τ_2 ; ...; ξ_p, τ_p , sabemos que los determinantes:

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \tau_1 \\ \xi_k & \tau_k \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, 2 \dots p)$$

constituyen el sistema completo de sus invariantes fundamentales. De estas expresiones invariantes, no todas son susceptibles de adquirir un significado en Geometría proyectiva; así la propiedad de que todo Δ_{ik} tiene un valor numérico determinado, no corresponde a ninguna propiedad geométrica, porque multiplicando ξ_i y τ_i por un factor ρ el punto i no varía, pero sí Δ_{ik} , que queda también multiplicado por ρ . En cambio, la relación $\Delta_{ik} = 0$ tiene significado geométrico, pues, escribiéndola en forma

$$\frac{\xi_i}{\eta_i} = \frac{\xi_k}{\eta_k}$$

se ve que en ella sólo intervienen realmente las razones de las coordenadas de los dos puntos, y su significación geométrica es evidente: *la coincidencia de los puntos i y k .*

Para obtener otros invariantes numéricos de grado nulo en las coordenadas hay que combinar más de dos puntos. Se ve

que es preciso tomar cuatro puntos 1, 2, 3, 4 al menos y formar los cocientes de la forma :

$$\frac{\Delta_{12} \cdot \Delta_{34}}{\Delta_{14} \cdot \Delta_{32}}$$

y se ve que cada uno de ellos es homogéneo y de grado cero respecto de cada uno de los pares de valores $\xi_1, \tau_1 : \dots ; \xi_4, \tau_4$, luego es un *invariante absoluto*, o de peso cero. El hecho de que el valor del cociente sea invariable en toda transformación proyectiva, ha de corresponder a alguna propiedad geométrica y, en efecto, este valor no es otra cosa que la *razón doble* de los cuatro puntos alineados, que escrita en coordenadas no homogéneas es :

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} : \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4}$$

Por consiguiente, *la razón doble de cuatro puntos aparece aquí, desde un punto de vista de la teoría de invariantes, necesariamente como el invariante más sencillo de cuatro puntos alineados, que satisface a la condición de homogeneidad, precisa para que tenga significado geométrico.*

Agreguemos a esto una observación más general. Ya antes hemos tratado de la tendencia que existe en Geometría proyectiva a referir todas las magnitudes de carácter invariante que en ella se presentan, a las razones dobles. Los resultados a que hemos llegado nos permiten ya decir que esta tendencia es equivocada, porque siendo la razón doble un caso particular de invariante racional, la pretensión de obtener de ella todos los demás invariantes, también en forma fraccionaria, complica innecesariamente el desarrollo. Es preferible comenzar formando los invariantes relativos racionales enteros, pasar de ellos a los racionales, en particular a los absolutos, imponiéndoles al mismo tiempo la condición de homogeneidad que exige la Geometría proyectiva. Así se tiene realmente una sistematización que hace pasar de lo más simple a lo más complicado, sistematización que desaparece cuando se comienza por establecer un invarian-

te racional particular, la razón doble, y se pretende expresar por su medio, exclusivamente, los demás invariantes.

Vamos a estudiar ahora la representación geométrica de las *sizygias* formadas con los invariantes Δ_{ik} . Partiendo de la *sizy-gia* fundamental:

$$\Delta_{12} \Delta_{34} + \Delta_{13} \Delta_{42} + \Delta_{14} \Delta_{23} = 0;$$

dividiendo por el último sumando, y teniendo en cuenta que

$$\Delta_{23} = -\Delta_{32} \quad \text{y} \quad \Delta_{42} = -\Delta_{24}$$

resulta:

$$\frac{\Delta_{12} \Delta_{34}}{\Delta_{14} \Delta_{32}} = 1 - \frac{\Delta_{13} \Delta_{24}}{\Delta_{14} \Delta_{23}}.$$

El primer miembro de esta igualdad es la razón doble de los puntos 1, 2, 3, 4, y el segundo contiene la de los mismos puntos, cuando se permuta el orden de sucesión del 2 y el 3. Dividiendo por los otros sumandos, aparecen las razones dobles de otras permutaciones de los puntos. *Las sizygias fundamentales entre las invariantes de cuatro puntos, representan, por lo tanto, las conocidas relaciones entre los seis valores que puede tomar la razón doble de dichos puntos según su orden de sucesión.*

De un modo análogo se puede encontrar la *significación de los invariantes ternarios y cuaternarios en la Geometría proyectiva del plano y del espacio* (*); obteniéndose así una *sistematización completa de dicha Geometría*, tanto respecto de las magnitudes que en ella se estudian (correspondientes a los invariantes), como de los teoremas que pueden enunciarse (correspondientes a las *sizygias*). Indudablemente, esta significación satisface menos desde el punto de la teoría de invariantes que de la Geometría; en la primera es preferible la interpretación dada en la Geometría afín del espacio E_{n+s} , porque en el E_n sólo son válidos los invariantes y las *sizygias* que satisfacen a la condición de homogeneidad.

(*) Este estudio se encuentra desarrollado en las obras ya citadas de *Salmon-Fiedler* y *Clebsch-Lindemann*.

4. *Sistematización de las Geometrías métricas y afín, basada en el principio de Cayley.*

En este párrafo, trataremos de la Geometría afín *general*, en la cual no ha lugar a suponer la existencia de un punto fijo que desempeñe un papel especial, tal como lo ha sido, al hablar de la significación de la teoría de invariantes, el origen de coordenadas.

El *principio de Cayley* dice que si x, y, z , son las coordenadas absolutas y ξ, η, ζ, τ las homogéneas de un punto del espacio de tres dimensiones, la Geometría *afín* resulta de la proyectiva mediante la adjunción del *plano del infinito* $\tau=0$, y la *métrica* por la del *plano del infinito y la curva esférica impropia* $\tau=0, \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$.

Una observación sobre esta curva facilitará la comprensión de lo que sigue; hasta ahora, la hemos representado por medio de *dos ecuaciones*, como sección, por el plano del infinito, de un cono cuyo vértice es el origen, pero también se la puede considerar como todas las cónicas, como *envolvente* de sus planos tangentes, y, por consiguiente, representarla por la *ecuación en coordenadas tangenciales*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

que expresa la condición para que el plano $\alpha\xi + \dots + \delta\tau = 0$, sea tangente a dicha curva esférica.

Ahora ya es fácil comprender el paso de la Geometría proyectiva a la afín y a la métrica, desde el punto de vista de la teoría de invariantes. Agreguemos al sistema de valores dado (coordenadas de puntos, formas lineales cuadráticas, etc.), que determina una figura, en el primer caso *una forma lineal determinada* τ (es decir, el sistema de coeficientes 0, 0, 0, 1), y en el segundo, la *cuadrática* $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, en *coordenadas tangenciales*. Aplicando ahora la teoría de invariantes al sistema de formas así ampliado, o sea, formando *el sistema completo de sus invariantes y de las sizygias entre ellos* y tomando los que satisfagan a la condición de homogeneidad se obtienen *todos los conceptos y teoremas de la Geometría afín y de la métrica, respectivamente, entre los elementos primitivamente dados*. De

este modo se consigue una sistematización completa de ambas Geometrías, gracias a la teoría de invariantes.

En vez de proseguir las consideraciones abstractas, vamos a presentar algunos *ejemplos sencillos* que esclarezcan el significado de las ideas generales que acabamos de exponer, mostrando cómo pueden representarse las magnitudes fundamentales más elementales de la Geometría afín y de la métrica, como invariantes simultáneos del sistema de magnitudes dadas y la forma τ o la $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, respectivamente.

El primer ejemplo pertenece a la *Geometría afín*. Como es sabido, el *volumen de un tetraedro* tiene por expresión

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6 \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4} \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & \tau_3 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 & \tau_4 \end{vmatrix}$$

El último determinante es el invariante fundamental relativo, de los cuatro puntos dados (pág. 189). Por otra parte, en el denominador aparecen los valores de la forma lineal τ agregada a la figura, para dichos puntos y éstos son los invariantes (absolutos) más sencillos que pueden construirse con el auxilio de una forma (pág. 189). Claro es que esto hay que interpretarlo en el sentido de que, al efectuar una transformación, hay que escribir en el denominador los valores de la forma en que se transforma la lineal τ , o que si, en general, se agrega la forma lineal $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta\tau$, aparecerá en el denominador el producto de los valores que toma esta forma para los puntos 1, ..., 4. Por consiguiente, *V es también una invariante racional* y además, homogéneo y de dimensión cero, respecto de las coordenadas de cada uno de los puntos. En cuanto a los coeficientes de la forma lineal agregada 0, 0, 0, 1 ó $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, que aparecen en el denominador, *V* tiene por dimensión -4 , de modo que, como estos coeficientes tienen un factor común arbitrario, el valor absoluto de *V* no puede tener significado alguno en la Geometría proyectiva de la figura así generalizada. Y, en efecto, no existe en la Geometría afín ningún medio para asignar un determinado volumen a un tetraedro, porque ello puede hacerse solamente cuando se fija una unidad, como siem-

pre que se utilizan coordenadas no homogéneas. Esto significaría, desde el punto de vista general en que ahora nos colocamos, agregar a la figura, además del plano del infinito $\tau=0$, algunos otros elementos. Así, por ejemplo, mediante la adición de un quinto punto, y formando el coeficiente de dos V análogas, se obtiene una expresión que por satisfacer a la condición de homogeneidad, es un *invariante absoluto* de la Geometría afín. La sola expresión V , por el contrario, es como ya sabemos (pág. 96), un *invariante relativo de peso 1*.

Conviene, al llegar a este punto, observar que las magnitudes elementales de Grassmann, de la Geometría, que dedujimos al comienzo de este tomo, pertenecen todas a la Geometría afín, como se ha visto al hacer el estudio particular de las transformaciones afines (pág. 95 y sig.). Pero el *principio de los determinantes de Grassmann* no es un concepto artificioso, sino *una aplicación natural de la teoría de invariantes a la Geometría afín*; es decir, a la Geometría proyectiva con la adición del plano del infinito.

La aparición de los determinantes que allí representaban segmentos, áreas y volúmenes, queda suficientemente explicada con el ejemplo anterior. Sólo falta ver, cómo la teoría de invariantes conduce a las magnitudes elementales de Grassmann, definidas por los determinantes menores de las *matrices rectangulares*. También esto se verá mejor con un ejemplo; consideremos dos puntos ξ_1, η_1, τ_1 ; ξ_2, η_2, τ_2 del plano, y veamos cómo se puede hallar el equivalente, desde el punto de vista de la teoría de invariantes, de las figuras que definen la Geometría afín. Esto se consigue tomando un tercer punto ξ, η, τ *indeterminado*, y considerando el invariante fundamental:

$$\frac{1}{\tau \tau_1 \tau_2} \begin{vmatrix} \xi & \eta & \tau \\ \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \end{vmatrix}$$

como una forma lineal respecto de ξ, η, τ . Los tres coeficientes de estas variables, son los menores de la matriz:

$$\frac{1}{\tau_1 \tau_2} \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \end{vmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

y, por consiguiente, las magnitudes características de la nueva figura, quedando así éstas referidas a las matrices rectangulares que en otro lugar hemos utilizado para definir el vector 1, 2. De un modo análogo se puede proceder en el espacio.

Más importante es ahora que se ha llegado ya al principio de Grassmann en la teoría de invariantes, ver cuál es su fecundidad, y, para ello, de un modo particular, comparar con el principio de clasificación que en las páginas 36 y siguientes, fué enunciado para el caso particular del grupo fundamental y del que entonces obtuvimos todas las figuras geométricas fundamentales. La generalización del principio de clasificación al caso de una transformación lineal cualquiera es inmediata. En efecto, según él, en toda «Geometría» junto a funciones racionales enteras *aisladas* de las series de magnitudes dadas (coordenadas, coeficientes de formas, etc.), que nos definían los invariantes, consideremos también *sistemas* de dichas funciones $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$. Si uno de estos sistemas se transforma en sí mismo en todas las sustituciones del grupo correspondiente, es decir, si las funciones $\Sigma'_1, \Sigma'_2, \dots$ formadas de la misma manera con las series de magnitudes transformadas pueden expresarse linealmente en función de $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$, mediante un sistema de coeficientes que se deduzcan de manera determinada unívoca de los de la transformación fundamental, diremos que *el sistema define una figura de la Geometría correspondiente*. Las funciones aisladas con las cuales se forma el sistema, se llaman *componentes de la figura*. El rasgo característico de la naturaleza de una figura geométrica es el comportamiento de sus componentes respecto a las transformaciones del grupo correspondiente; se dice que dos figuras geométricas son de la *misma especie*, cuando sus correspondientes forman dos series del mismo número de expresiones, que sufren la *misma* sustitución lineal en el cambio de coordenadas y, por tanto, según la denominación antes empleada, son *cogredientes*. Si un sistema de funciones que define una figura geométrica está constituido por una sola función, la sustitución lineal se reduce a la multiplicación por un factor, y la función es un invariante relativo.

Para la mejor comprensión de estas ideas abstractas, vamos a fijarnos en un ejemplo sencillo de la teoría de invariantes del

campo ternario, que interpretaremos en la Geometría afín del espacio tridimensional en el que se haya fijado el origen de coordenadas. Dados dos puntos $\xi_1, \eta_1, \tau_1; \xi_2, \eta_2, \tau_2$, el sistema de funciones más sencillo en el que las dos ternas de coordenadas aparecen de manera homogénea y simétrica es el sistema de los 9 términos bilineales

$$(1) \quad \xi_1 \xi_2, \xi_1 \eta_2, \xi_1 \tau_2, \eta_1 \xi_2, \dots, \tau_1 \tau_2$$

En una transformación lineal (utilizando la notación acostumbrada) se tiene:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi'_1 \xi'_2 = a_1^2 \xi_1 \xi_2 + a_1 b_1 (\xi_1 \eta_2 + \eta_1 \xi_2) + \dots + d_1^2 \tau_1 \tau_2 \\ \xi'_1 \eta'_2 = a_1 a_2 \xi_1 \xi_2 + a_1 b_2 \xi_1 \eta_2 + a_1 b_1 \eta_1 \xi_2 + \dots + d_1 d_2 \tau_1 \tau_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \tau'_1 \tau'_2 = a_4^2 \xi_1 \xi_2 + a_4 b_4 (\xi_1 \eta_2 + \eta_1 \xi_2) + \dots + d_4^2 \tau_1 \tau_2 \end{array} \right.$$

es decir, estas 9 magnitudes forman, en efecto, un sistema de la naturaleza antedicha y podremos, por tanto, considerarlo como componente de una figura de nuestra Geometría afín; esta figura y todo sistema formado con las 9 magnitudes que se transforman según las ecuaciones (2) se llama, modernamente, un *tensor*.

La consideración de las ecuaciones (2) permite deducir fácilmente construcciones lineales sencillas de seis o de tres de las nueve magnitudes (1), que pueden sustituirse linealmente entre sí. Imaginando agrupadas las magnitudes (1) en un sistema cuadrático:

$$\begin{array}{ccc} \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \eta_2 & \xi_1 \tau_2 \\ \eta_1 \xi_2 & \eta_1 \eta_2 & \eta_1 \tau_2 \\ \tau_1 \xi_2 & \tau_1 \eta_2 & \tau_1 \tau_2 \end{array}$$

se obtienen aquellas sustituciones, las unas como sumas de los términos simétricos respecto de la diagonal:

$$(3) \quad 2\xi_1 \xi_2, \xi_1 \eta_2 + \eta_1 \xi_2, \xi_1 \tau_2 + \tau_1 \xi_2, \dots, 2\tau_1 \tau_2$$

y las otras como diferencias de los mismos:

$$(4) \quad \xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2, \xi_1 \tau_2 - \tau_1 \xi_2, \eta_1 \tau_2 - \tau_1 \eta_2$$

Las fórmulas de sustitución para los sistemas de magnitudes (3) y (4) se deducen inmediatamente de las ecuaciones (2). Se obtienen, pues, dos nuevas figuras, y se dice que el formado con las 6 magnitudes (3) es el *tensor simétrico*, mientras que el formado con las tres magnitudes (4) representa el elemento *plano de área*, ya conocido. El nombre es naturalmente válido también para todo sistema de magnitudes que se transforme cogredientemente. El calificativo de «simétrico» se justifica como veremos más adelante.

En cuanto a la significación geométrica de las tres magnitudes (4), ya sabemos (pág. 32), que representan los duplos de las proyecciones del triángulo formado por los puntos $\xi_1, \eta_1, \tau_1; \xi_2, \eta_2, \tau_2$ y el origen de coordenadas, recorrido en un sentido conveniente, sobre los planos coordenados, y tenemos aquí precisamente, una de las figuras que proporcionaba el principio de los determinantes de Grassmann, lo cual autoriza a enunciar de un modo general: *En la investigación sistemática de la Geometría afín mediante el principio de clasificación, se llega siempre, necesariamente, entre otras, a las figuras geométricas establecidas por el principio de los determinantes de Grassmann.* Naturalmente, no es posible detenerse aquí en el examen de todos los casos; baste la indicación de que todas las figuras de que hasta aquí se ha hablado, se deducen de manera enteramente análoga, estudiando la Geometría afín general, basada en el principio de Cayley, utilizando la teoría de los invariantes cuaternarios (pág. 199 y sig.).

El resultado más importante de nuestra investigación es el reconocimiento de que *el principio de los determinantes de Grassmann es algo particular que por sí sólo no proporciona todas las figuras de la Geometría afín*; los tensores (1) y (3) son *figuras geométricas esencialmente nuevas.*

Por la gran importancia que estas figuras tienen en muchas teorías de la Física, por ejemplo, la de las deformaciones elásticas y la de la relatividad, insistiremos algo más en ellas, comenzando por algunas consideraciones relativas al nombre dado a estas figuras geométricas y que podrán facilitar al lector el manejo de la literatura sobre cálculo tensorial.

La palabra «tensor» ha sido usada en otro sentido que aho-

ra, con ocasión de lo dicho sobre los cuaternios de Hamilton en el tomo I de esta obra. Si $q = a + bi + cj + dk$ es un cuaternio, decíamos que su tensor es la expresión $T = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, y esta denominación, debida a Hamilton, estaba justificada porque como vimos (tomo I, pág. 85 y siguientes), la multiplicación por un cuaternio equivale geoméricamente a una dilatación seguida de un giro, con origen de coordenadas fijo, y como medida de la dilatación se obtenía, precisamente, la magnitud T designada como tensor. En estrecha dependencia con éste, se encuentra el uso hecho por *W. Voigt* de la palabra «tensor», en Física cristalográfica (*). Voigt designa de este modo magnitudes orientadas que corresponden a los procesos de dilatación o compresión de una barra recta que en dirección de su eje es estirada o comprimida en sentidos contrarios por

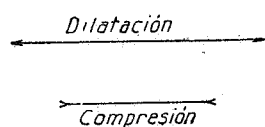


Figura 100

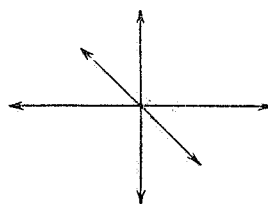


Figura 101

sus extremos. Gráficamente, podría representarse un tensor de esta naturaleza por un segmento en cuyos extremos se pusiesen flechas dirigidas en sentidos contrarios (fig. 100).

Se puede designar el carácter de dirección del tensor así imaginado, como «biforme», en oposición al antes considerado, que sería «uniforme». En Física, los tensores que más frecuentemente aparecen son ternas de tensores, es decir, tensores perpendiculares entre sí, dos a dos (fig. 101). En otro lugar (página 80) hemos referido ya la deformación homogénea pura a dilataciones uniformes en tres direcciones perpendiculares entre sí dos a dos. En lugar de esto, podemos ahora decir: La deformación homogénea pura está representada geoméricamente por una

(*) Véase, por ejemplo: a) Der gegenwärtige Standt unserer Kenntnisse der Kristallelastizität; b) Über die Parameter der Kristallphysik und über gerichtete Grössen höherer Ordnung. Göttinger Nachrichten, 1900.

terna de tensores. A la noción de «tensor», tal como hoy se aplica generalmente esta palabra, se llega cuando se considera el conjunto de dichas tres dilataciones del espacio como una sola magnitud geométrica y, prescindiendo de la palabra terna, se aplica la de tensor a *esta* magnitud. Así entendido, el concepto de tensor, es el mismo al que antes aplicamos la denominación de «tensor simétrico».

Cuando se supone fijo el origen de coordenadas, la deformación homogénea pura está representada por sustituciones de este tipo :

$$(5) \quad \begin{cases} \xi = a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z \\ \eta = a_{12} x + a_{22} y + a_{23} z \\ \tau = a_{13} x + a_{23} y + a_{33} z \end{cases} \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

en que las ternas de números x, y, z ; ξ, η, τ , indican coordenadas puntuales en el mismo sistema cartesiano rectangular. El esquema de los coeficientes de esta transformación es simétrico respecto de la diagonal principal. Si, continuando fijo el origen de coordenadas, cambiamos de ejes, un sencillo cálculo demuestra (las mismas fórmulas que dan x, y, z en función de x', y', z' dan ξ, η, τ en función de ξ', η', τ') que la nueva representación de la deformación, es la siguiente :

$$(6) \quad \begin{cases} \xi' = a'_{11} x' + a'_{12} y' + a'_{13} z' \\ \eta' = a'_{12} x' + a'_{22} y' + a'_{23} z' \\ \tau' = a'_{13} x' + a'_{23} y' + a'_{33} z' \end{cases} \quad (a'_{ik} = a'_{ki})$$

y así resultan como propiedades de los seis coeficientes $a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{33}$:

1.º Que dependen linealmente de los seis $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ y sólo de éstos, *luego definen una magnitud geométrica* ;

2.º Que, en particular, se transforman con las expresiones bilineales (3) en las coordenadas, que en la página 203 designamos como componentes de un *tensor simétrico*. El calificativo de simétrico queda justificado mediante la simetría de las matrices de los coeficientes de las fórmulas de transformación (5) y (6).

Pasemos ahora a una afinidad general, con origen de coordenadas fijo :

$$(7) \quad \begin{cases} \xi = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \eta = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \tau = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}$$

procediendo de la misma manera, resulta que, en la Geometría de las transformaciones ortogonales, los 9 coeficientes a_{11} , a_{12} , ..., a_{33} se transforman como los 9 productos de coordenadas (1); por consiguiente, son componentes de una magnitud de la misma especie. En nuestra terminología, según la cual, la palabra tensor no se aplica particularmente sólo al caso de la deformación homogénea pura, se dice: La matriz de los coeficientes de una transformación afín general es un tensor.

En la literatura se encuentran otros muchos nombres, aplicados a este mismo concepto. Algunos de los más frecuentes son los siguientes :

- 1.º *Afesor* (por su relación con la transformación afín);
- 2.º *Función lineal vectorial* (porque las sustituciones lineales (7) pueden interpretarse como la correspondencia entre los vectores que tienen su origen en el de coordenadas y sus extremos en los puntos x, y, z ; ξ, η, τ);
- 3.º *Diadas y diádicas*. Sin embargo, la primera de estas palabras sólo se utilizó originariamente para un caso particular, del que más adelante nos ocuparemos.

También los componentes del área plana (4) pueden concebirse como coeficientes de una transformación de la siguiente especie :

$$(8) \quad \begin{cases} \xi = 1 \cdot x - c \cdot y + b \cdot z \\ \eta = c \cdot x + 1 \cdot y - a \cdot z \\ \tau = -b \cdot x + a \cdot y + 1 \cdot z \end{cases}$$

y, en efecto, los coeficientes de esta sustitución se comportan, como fácilmente se comprueba, lo mismo que las expresiones bilineales (4) en las transformaciones de coordenadas rectangulares. Por la naturaleza de la matriz de los coeficientes de las fórmulas (8) (simetría respecto de la diagonal principal, con

cambio de signo) la magnitud que determinan recibe el nombre de *tensor antisimétrico*.

Las fórmulas (7) pueden interpretarse geoméricamente, según es sabido, como deformación homogénea general; las (6) como deformación pura (sin giros); las (8) como deformación *infinitesimal*.

Así, pues, *al proceso formal con el cual se han deducido en la página 202 el tensor simétrico y el tensor antisimétrico de los productos de coordenadas (1) corresponde geoméricamente la descomposición de una deformación infinitesimal homogénea en una deformación pura y una rotación.*

Hasta aquí nos hemos limitado en los cambios de coordenadas a las transformaciones ortogonales. Debemos aún añadir algunos complementos para el caso de pasar de un sistema de coordenadas rectangulares a otro de oblicuas, o, de un modo general, a considerar en adelante las $\xi, \eta, \tau; x, y, z$ como coordenadas cartesianas oblicuas. (La restricción de no variar el origen de coordenadas continuará válida.) Pasamos, pues, de la Geometría del grupo fundamental a la del grupo afín.

Si se estudia para este grupo el comportamiento de los coeficientes de la sustitución (7) en las transformaciones de coordenadas, resulta que también representa las componentes de una magnitud geométrica, pero que no se transforman como los productos de coordenadas (1), sino de manera *contragradiente* respecto de éstos. Cosa análoga ocurre con los coeficientes de (6) y (8). Ahora bien, puede verse que el mismo tensor (por ejemplo, la misma deformación homogénea), puede ser dado respecto a un sistema de coordenadas por componentes de la naturaleza (1) o por coeficientes de la especie de los (7). A los primeros se les llaman componentes «cogredientes» del tensor, y a los segundos «contragredientes». En lugar de «cogredientes» y «contragredientes» se dice también, de ordinario, «contravariantes», y «covariantes». A veces, también se cambia la significación de estas últimas expresiones. La diferencia entre las dos especies de componentes es la misma que entre coordenadas puntuales y tangenciales.

Una interpretación más amplia que la más general vista hasta ahora de la palabra «tensor», se obtiene al estudiar el

comportamiento de las formas homogéneas en el cambio de coordenadas. En la página 176 hemos considerado ya el caso de una forma cuadrática (con una notación un poco diferente):

$$a_{11} \xi^2 + 2a_{12} \xi\eta + \dots + a_{33} \tau^2$$

y vimos que los coeficientes a_{11} , a_{12} , ..., a_{33} de la forma se sustituyen homogénea, lineal y contragredientemente respecto de los términos ξ^2 , $\xi\eta$, ..., τ^2 ; pero la transformación de éstos es cogrediente respecto de las expresiones (3), como se ve fácilmente. Podemos, pues, enunciar estos resultados diciendo: Los coeficientes a_{11} , $2a_{12}$, ..., a_{33} de una forma cuadrática son los componentes contragredientes de un tensor simétrico, y los términos ξ^2 , $\xi\eta$, ..., τ^2 los componentes cogredientes del mismo. Cosa análoga ocurre en una forma bilineal. De ésta se dice, siguiendo a *Gibbs*, que define una *diada* en el caso particular de poder ser escrita como producto de dos formas lineales.

Si se tiene una *forma lineal n-ple* de coordenadas de puntos, un cálculo sencillo demuestra que también la sustitución de un coeficiente en un cambio de coordenadas es lineal y homogénea y contragrediente respecto de los términos correspondientes de las coordenadas de dos puntos.

La generalización del concepto de tensor a que poco antes nos referíamos, consiste en designar como tensor a todas las magnitudes que se utilicen en relación con una forma bilineal y sólo a ellas, como hemos dicho. En esta forma general ha sido utilizada la denominación por *Einstein* y sus discípulos. Antes, en lugar de ella se hablaba de *formas* lineales, cuadráticas, bilineales, trilineales, cúbicas, etc.

En la práctica, para mayor precisión de las ideas, el sistema de los componentes de un tensor se designa con una *sola* letra, y con ellas se opera formalmente en el cálculo tensorial. Todo esto es, en sí mismo, muy sencillo y únicamente lo dificultan para el lector las diferencias de notaciones utilizadas por los distintos autores. Aparecen aquí, en medida mucho más elevada, los mismos inconvenientes de que hablamos en el cálculo vectorial y que parece imposible evitar, pero no podemos dejar de citarlos, porque se presentan constantemente en la literatura moderna.

Pasando ahora a la *Geometría métrica*, también nos limitaremos a unos pocos ejemplos característicos, y veremos cómo los dos conceptos fundamentales más importantes «*distancia* r entre dos puntos $x_1 = \frac{\xi_1}{\tau_1}, \dots$ y $x_2 = \frac{\xi_2}{\tau_2}, \dots$ » y «*ángulo*, ω , de dos planos $\alpha_1, \dots, \delta_2$ y $\alpha_2, \dots, \delta_2$ », se pueden derivar de la teoría de invariantes. Según conocidas fórmulas de Geometría analítica, se tiene:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \sqrt{\frac{(\xi_1 \tau_2 - \xi_2 \tau_1)^2 + (\eta_1 \tau_2 - \eta_2 \tau_1)^2 + (\zeta_1 \tau_2 - \zeta_2 \tau_1)^2}{\tau_1^2 \tau_2^2}},$$

$$\omega = \arccos \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)}},$$

Como la primera es función algebraica de los parámetros y la segunda es transcendente, las designaremos con los respectivos nombres de *invariante «algebraico»* y «*transcendente*», queriendo decir con esto que las partes que los constituyen son invariantes, en el sentido que hasta ahora hemos dado a esta palabra.

Comencemos por el *ángulo* ω . La figura de la cual debe ser invariante, se compone de dos formas lineales:

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \quad \text{y} \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$$

y de la forma cuadrática:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 0 \cdot \delta^2$$

representante de la curva esférica impropia en coordenadas tangenciales. Según la ley de correlación, es evidente que de esta última forma, se pueden obtener invariantes del mismo modo que con las expresadas en coordenadas de puntos. En particular, los dos valores que toma para los de α, β, γ , dados:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + 0 \cdot \delta_1^2 \quad \text{y} \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 + 0 \cdot \delta_2^2$$

y el de su forma polar:

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2$$

son invariantes. Ahora bien; la expresión de $\cos \omega$ está constituida precisamente por estas formas, y además es *homogénea y de grado cero* respecto de los sistemas de los valores $\alpha_1, \dots, \delta_1$ y $\alpha_2, \dots, \delta_2$ y de los coeficientes 1, 1, 1, 0 de la forma cuadrática dada, de modo que tendrá una significación determinada en Geometría métrica. En efecto, el valor de $\cos \omega$ es independiente de la arbitraria elección de la unidad de medida. La expresión que da $\cos \omega$ es, por lo tanto, un *invariante absoluto*.

Para el estudio de la expresión que da la *distancia*, r , entre dos puntos, recordemos que se tenían invariantes de una forma cuadrática en coordenadas puntuales orlando su determinante con las coordenadas de uno o dos planos (pág. 190 y siguientes). De la misma manera obtendremos ahora para la figura constituida por esta forma cuadrática en coordenadas de planos y dos puntos, cuando, procediendo de un modo correlativo, orlemos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

de la forma $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \delta^2$ con las coordenadas ξ_1, \dots, τ_1 y ξ_2, \dots, τ_2 de ambos puntos una y dos veces y formemos el cociente de los invariantes que así resultan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_1 & \tau_2 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} : \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_1 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_2 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 \end{vmatrix} \right\}$$

Haciendo el cálculo, resulta una expresión de r^2 igual a la anteriormente escrita, con lo cual queda demostrado su invariancia. Análogamente a lo que ocurría en los invariantes fundamentales de la Geometría afín, esta expresión, aunque es homogénea y de grado cero, respecto de las coordenadas de los

puntos, no lo es en los coeficientes de la forma cuadrática, sino que es de grado -4 respecto de ellos. *Tampoco es un invariante absoluto*, porque siendo 2 el peso de cada uno de los tres determinantes, el del cociente es $2-4=-2$. De esto se infiere que el concepto de distancia entre dos puntos, no puede tener significación inmediata en Geometría métrica, y efectivamente, la distancia entre dos puntos no puede ser medida, sino en el caso de que se haya tomado otro segmento arbitrario como unidad.

Los invariantes absolutos de la Geometría métrica están representados por cocientes de expresiones análogas a la que estudiamos.

Tampoco aquí hemos de entrar en pormenores; estos ejemplos son suficientes para, al menos, formarse idea aproximada de cómo se ve la sistemática completa de la Geometría métrica y de la afín, que se origina en el encadenamiento sistemático de los invariantes racionales enteros; y, como siempre, remitimos al lector a los Tratados ya citados (*).

Como último ejemplo referente a sistematización por medio de la teoría de invariantes citaremos la *Geometría del triángulo*, ya tratada con detalle en la última edición de Clebsch-Lindemann, y que principalmente debido a los trabajos de los profesores de segunda enseñanza, ha llegado a constituir un cuerpo cerrado de doctrina, en el que se trata de muchos *puntos, rectas y circunferencias notables* que pueden definirse en un triángulo (baricentro, ortocentro, circuncentro, incentro, círculo de Feuerbach, etc.). Los innumerables teoremas que así se han obtenido y los que se obtengan, pueden sistematizarse del siguiente modo: Consideremos dados tres puntos ξ_1, η_1, τ_1 ; ξ_2, η_2, τ_2 ; ξ_3, η_3, τ_3 del plano (fig. 102), como vértices de un triángulo, y como se trata de relaciones métricas, a la figura formada por ellos se agregan los dos *puntos circulares* del plano, ya en forma de ecuación tangencial $\alpha^2 + \beta^2 = 0$; ya simplemente dados por sus coordenadas $1, i, 0$ y $1, -i, 0$; se obtienen entonces *toda la Geometría del triángulo, como teoría de los invariantes proyec-*

(*) Véase también *Burkhardt, Ueber Funktionen von Vektorgrößen*, Math. Ann., 1893, tomo 43.º.

tivos de estos cinco puntos. Así, esta parte de la Geometría adquiere el carácter que actualmente no tiene de disciplina perfectamente sistematizada.

Terminamos con esto las consideraciones sobre la sistematización de la Geometría. Ciertamente queda satisfecho el sentimiento estético cuando se disponen las cosas de la manera expuesta, y como únicamente procediendo así se puede llegar hasta el fondo de la Geometría, todo matemático y todo aspirante al profesorado debería conocerla. Pero parece necesari-

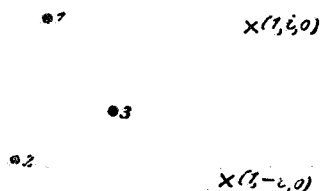


Figura 102

rio prevenirles de que, a veces, en la literatura matemática se encuentran exposiciones opuestas a este modo de ver. Claro es que sería absurdo el ligarse rígidamente a esta sistematización y no explicar la Geometría sin salirse de este esquema; llegaría en seguida el aburrimiento y se perdería todo el encanto de llegar a nuevos resultados, lo que siempre ocurre independientemente de toda sistemática.

II. Fundamentos de la Geometría

Terminada la parte relativa a la arquitectura de la Geometría, vamos a ocuparnos ahora de sus fundamentos, cuestión no menos importante, y de la que puede formarse idea completa leyendo el artículo de *F. Enriques*, titulado «*Prinzipien der Geometrie*», en la Enciclopedia (tomo III, A. B. 1).

Las investigaciones sobre los fundamentos de la Geometría, pertenecen en gran parte, a los dominios de la Teoría del conocimiento y de la Psicología, que estudian cómo se origina la idea del espacio y las razones para poder tratarla con los

métodos matemáticos. Naturalmente, nosotros no podemos en esta cuestión hacer otra cosa que indicarla de pasada, y ocuparnos de la *parte matemática del problema*, admitiendo como dada la idea del espacio, dejando de lado, por esto mismo, una cuestión pedagógica muy importante, la de ver cómo va precisándose en cada individuo el concepto de espacio al que, como matemáticos, estamos acostumbrados.

Nuestro problema, así delimitado, es entonces el de *construir todo el edificio de la Geometría por medio de operaciones lógicas aplicadas a fundamentos lo más sencillos posible*. Es indudable que estos fundamentos no puede darlos la lógica pura; la deducción lógica únicamente puede comenzar a aplicarse cuando esté resuelta la *primera parte* del problema: *cuando se está en posesión de un sistema de ciertos conceptos fundamentales sencillos y de ciertas relaciones simples entre ellos (axiomas), justificados por las experiencias más sencillas de nuestra intuición*. Existe, naturalmente, gran libertad, tanto en la adopción de unos u otros de estos axiomas, como en su disgregación en más o menos proposiciones independientes entre sí. La única exigencia que condiciona tal libertad es la que constituye la *segunda parte del problema*: *que pueda ser deducido lógicamente de aquellos conceptos fundamentales y axiomas todo el contenido de la Geometría*, sin que sea preciso hacer ningún nuevo llamamiento a la intuición.

El carácter que en general hemos dado a estas lecciones nos indica el camino que para ser consecuentes hemos de seguir, al tratar este problema, pues ya que hemos utilizado constantemente los medios del Análisis, parece natural admitir como conocido éste y preguntarnos simplemente *cómo se puede llegar por el camino más corto a establecer los principales teoremas de Geometría analítica, apoyándonos en un sistema determinado de axiomas*.

Desgraciadamente, es muy rara esta sencilla formulación, porque los géómetras suelen tener cierta repugnancia a utilizar el Análisis y procurar ir lo más lejos posible, sin hacer uso de los números.

La resolución del problema así planteado no es única, pues depende evidentemente de cuales sean los conceptos primitivos

y axiomas que se adopten. Lo más corriente es partir de los *conceptos fundamentales de la Geometría proyectiva, el punto, la recta y el plano*, conceptos cuyo carácter hemos señalado en otro lugar. No se trata ahora de *definirlos*, sino de expresar, suponiéndolos de todos conocido, sus propiedades características y sus relaciones mutuas y de forma con unas y otras un sistema de axiomas que sirva para el ulterior desarrollo lógico de la Geometría. Tampoco vamos a enunciar cada uno de los axiomas, ya que pueden encontrarse en otros libros (véase el citado de Enriques), sino solamente a estudiar su contenido y significación.

En primer lugar están los *axiomas de enlace* de los cuales ya hemos hablado en la Geometría proyectiva (pág. 77). Lo que

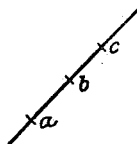


Figura 103

no podemos hacer aquí es admitir, desde luego, como allí hacíamos, la existencia de un punto de intersección de dos rectas coplanarias, o una recta de intersección de dos planos, sino, como corresponde a relaciones inmediatamente observables de la Geometría afín y de la numérica, limitarnos a decir *que dos rectas de un plano tienen un punto común o ninguno y que dos planos tienen común una recta o ningún punto*, con lo cual para pasar a la Geometría proyectiva basta aceptar la existencia de puntos, rectas y planos *impropios*.

Los *axiomas de ordenación* expresan las posiciones relativas que varios puntos pueden ocupar sobre una recta, por ejemplo; si tres puntos están sobre una recta, uno de ellos está entre los otros dos; a veces se los llama brevemente *axiomas del entre* (fig. 103).

Finalmente, en lo que se refiere a los *axiomas de continuidad* señalemos aquí tan sólo los relativos a la recta: Si se dividen los puntos del segmento AB (suponiendo que A está a la iz-

quierda de B) en dos partes 1 y 2, tales que todos los puntos de 1 estén a la izquierda de todos los de 2, existe un punto C que separa ambas partes, de tal modo que los puntos de 1 están entre A y C y los de 2 entre C y B . Esta propiedad corresponde evidentemente a la introducción del número irracional por las cortaduras de Dedekind (*).

De los precedentes axiomas se puede derivar lógicamente toda la Geometría proyectiva del espacio, ya operando por procedimientos puramente geométricos, ya analíticamente por medio de la introducción de un sistema de coordenadas.

Para establecer la *Geometría métrica*, se comienza por observar que tiene de común con la Geometría proyectiva el concepto del grupo de las ∞^{15} *colineaciones* o transformaciones proyectivas del espacio. Sabemos que como subgrupo de él está el *grupo fundamental*, de 7 parámetros, de las transformaciones del espacio cuya teoría de invariantes es la Geometría proyectiva; el cual se compone de las colineaciones que dejan invariable un plano, el *plano del infinito*, y una curva de segundo grado contenida en él, la *curva esférica impropia* (o, lo que es lo mismo, el sistema polar absoluto). Partiendo de esto, debe darse un nuevo paso si se quiere llegar a los teoremas de la Geometría elemental: se deben separar del grupo fundamental el *subgrupo de 6 parámetros formado por los movimientos* (traslaciones y giros) que, en oposición a las transformaciones de semejanza, dejan completamente invariable la distancia entre dos puntos, y, por tanto, tienen, como teoría de sus invariantes, la Geometría métrica de las congruencias. Los movimientos pueden destacarse del grupo fundamental mediante la condición, por ejemplo, de que *las «trayectorias» de un movimiento son cerradas*, siempre que tengan un punto fijo.

Este modo de fundamentar la Geometría es probablemente *el más sencillo teóricamente*, porque comenzando por la Geometría proyectiva basta operar con formas lineales y solamente para pasar a la métrica se hace precisa una forma cuadrática, que es la curva esférica impropia. Sin embargo, la exposición detallada del método se hace enfadosa por lo sumamente abs-

(*) Véase tomo I, pág. 38 y siguientes.

tracta y sólo puede tener cabida en un tratada especial de Geometría proyectiva. Uno de los más recomendables, por la claridad de exposición es el de Enriques (*).

Para la enseñanza nos parece más conveniente el método que limitándonos a la Geometría plana, exponemos a continuación.

1. *Construcción de la Geometría plana, basada en la noción de movimiento.*

Como conceptos fundamentales se toman los de *punto* y *recta* y sobre ellos se establecen los axiomas de *enlace*, *ordenación* y *continuidad*. Los del primer grupo se reducen en este caso a suponer que *por dos puntos cualesquiera pasa una recta y sólo una*, y que *dos rectas cualesquiera tienen común un punto o ninguno*. Los de *ordenación* son en esencia los mismos aceptados anteriormente, pero tanto ellos como el de *continuidad*, los formularemos con precisión más adelante.

Sobre esta base puede establecerse, sin el rodeo de la proyectividad, el *grupo de los ∞^3 movimientos del plano*, con cuyo auxilio se llega a obtener toda la Geometría analítica plana. Para ello es preciso en primer lugar, formular una serie de axiomas abstractos que expresen las propiedades de estos «movimientos» que han de ser utilizadas, orientándose como es natural por la representación intuitiva que todos tenemos del movimiento, gracias a la experiencia que nos proporciona el de los cuerpos sensibles rígidos. Según esto, todo movimiento puede ser considerado como una transformación biunívoca de los puntos del espacio (por tanto, en particular, a cada punto corresponde otro *propio*), en la que a cada recta corresponda también una recta. La palabra más adecuada para designar una transformación de este género es la de *colineación*. Si no suponemos conocida la Geometría proyectiva, habrá que postular la posibilidad de tal colineación admitiendo como axioma que *existe un grupo de ∞^3 colineaciones que llamaremos movimientos*, y la teoría de invariantes de este grupo constituye la Geo-

(*) *Lezioni di Geometria proiettiva*, 3.^a edición, Bologna, 1909.

metría plana. Conviene precisar el significado del símbolo ∞^3 . Supongamos dos puntos A y A' (fig. 104), y un semirrayo a, a' , a partir de cada uno de ellos: entonces, lo que se quiere decir es que, *existe un movimiento y solamente uno que hace coincidir el punto A con el A' y el semirrayo a con el a'* . En lo sucesivo llamaremos *congruentes* las figuras que son susceptibles de coincidir por medio de un movimiento.

No vamos a utilizar por ahora el grupo completo cuya existencia hemos admitido, sino un solo movimiento particular, sobre el cual estableceremos algunos postulados especiales. Este movimiento, que llamaremos *traslación* o más precisamente *traslación paralela*, es el que transforma un punto A en otro arbitrariamente dado A' , conservando invariable (incluso en senti-

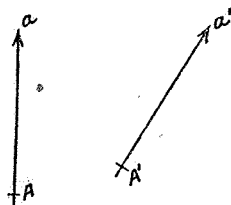


Figura 104

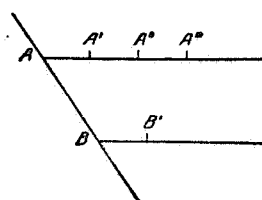


Figura 105

do), la recta AA' . Para establecer rigurosamente la traslación, debe postularse que *en toda traslación, la recta que une dos puntos correspondientes se transforma en sí misma* y que (y esto es lo esencial) las ∞^2 traslaciones del plano forman un subgrupo del grupo de los movimientos.

Repetiendo varias veces la misma traslación, el punto A (figura 105), tomará sucesivamente las posiciones $A', A'', A''' \dots$ del semirrayo AA' , siendo preciso postular que *de este modo puede ser alcanzado o pasado cualquier punto de dicho semirrayo*.

Los puntos del otro semirrayo de la misma recta se obtienen por repetición de la transformación recíproca. Llamando *trayectoria* del punto A a la recta $AA'A''$ de sus posiciones sucesivas, podemos decir que cada recta es trayectoria de infinitos puntos y para cada traslación existen ∞^1 trayectorias recti-

líneas, que son todas las rectas que se transforman en sí mismas en la traslación.

Dos trayectorias de la misma traslación no pueden cortarse. pues si tuviesen un punto común, éste correspondería a dos puntos diferentes, uno por cada traslación, lo cual contradice la hipótesis que hemos hecho, de ser una transformación biunívoca. Llamando a las trayectorias *rectas paralelas*, queda introducida la noción de paralelismo como consecuencia de una propiedad del movimiento de traslación. Al mismo tiempo queda demostrado que *por todo punto A pasa una paralela a cualquier recta a*, que es la recta trayectoria de este punto en la traslación a lo largo de la recta *a*.

El último axioma sobre este movimiento, es que *el producto de dos traslaciones T' y T'' no depende del orden de éstas*, es

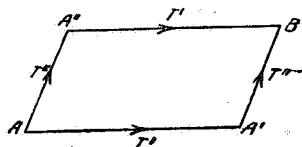


Figura 106

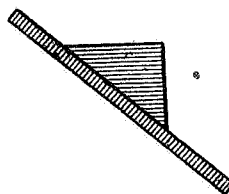


Figura 107

decir, que se obtiene el mismo punto *B* (fig. 106), aplicando primero la traslación *T'* y después la *T''* que haciéndolo en orden inverso; simbólicamente, esto se expresa así:

$$T' \cdot T'' = T'' \cdot T'$$

Más adelante estudiaremos el modo de llegar a estos axiomas. Por el momento, basta decir que en esencia no expresan más que sencillas propiedades conocidas por todo el que esté iniciado en el dibujo geométrico. En efecto, al dibujar se repite infinidad de veces el transporte de una distancia, sea con la regla o con el compás; y la operación de la traslación también es frecuentísima, por ejemplo, cuando se hace resbalar un lado de la escuadra sobre el borde de la regla (fig. 107); la experiencia demuestra que todos los puntos del triángulo que constituye la regla, describen rectas paralelas. Esto demuestra que los

axiomas que hemos admitido no pueden ser calificados de artificiosos.

Vamos ahora a tratar de utilizar estas primeras ideas referentes a la traslación, para nuestro propósito de establecer la Geometría analítica plana. Desde luego, se advierte la imposibilidad de hablar de coordenadas cartesianas singulares, puesto que aún no ha sido dada la definición de ángulo recto, pero nada impide usar un sistema general de coordenadas paralelas. Sean, pues, dos rectas cualesquiera, que llamaremos ejes x , y , con un punto común O . Efectuando una traslación T a lo largo de x , que lleve el punto O al punto 1, previamente fijado, y repitiendo la operación, tendremos los puntos 2,

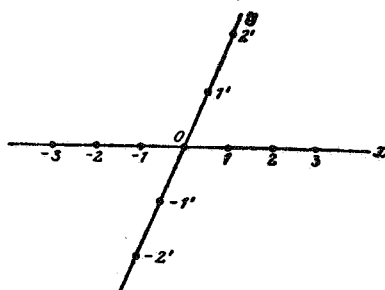


Figura 108

3, 4, ... del eje x . Mediante la *transformación inversa* T^{-1} que transforma 1 en 0, se obtienen los puntos $-1, -2, -3, \dots$ del eje x . Atribuyendo a los puntos así obtenidos los números enteros $0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots$ como «abscisas», su conjunto evidentemente no llena el eje x ; pero cualquier otro punto de este eje estará (según uno de los axiomas admitidos), comprendido entre dos del conjunto. Operando de un modo análogo, partiendo de una traslación cualquiera a lo largo del eje y , se obtiene la serie de puntos $1', 2', 3', \dots, -1', -2', -3', \dots$ de *ordenada entera*. Es digno de hacerse notar que los puntos del eje x no pueden hacerse corresponder con los del y , pues para ello haría falta aplicar otro movimiento (giro) no incluido en el grupo de las traslaciones.

Ahora podemos llegar también a los puntos del eje x de coor-

denadas no enteras, conservando la unidad elegida. Comenzando por los puntos racionales, se empezará por buscar una traslación S a lo largo del eje x , tal que por una repetición, por ejemplo, para fijar las ideas, dé lugar a la traslación T . Al punto en que se transforma O por la traslación S lo designamos como punto $\frac{1}{2}$, y repitiendo sucesivamente la traslación S vamos obteniendo los puntos $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, ... En cuanto a la posibilidad de existencia de dicha transformación S , basta observar que la paralela por $1'$ a la recta $12'$ corta al eje x en el punto de abscisa $\frac{1}{2}$ (según la conocida construcción para dividir un segmento en partes iguales). En efecto, la traslación S de O

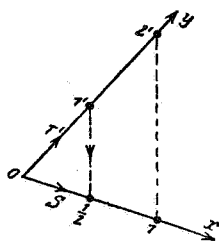


Figura 109

a $\frac{1}{2}$ (fig. 109), puede ser considerada como producto de las T' (de 0 a $1'$) y S' (de $1'$ a $\frac{1}{2}$) y la de 0 a 1 como $S \cdot S$, o bien como $(02') \cdot (2'1)$. Puede, pues, escribirse:

$$(0, 1) = (0, 2') \cdot (2', 1)$$

o lo que es lo mismo

$$S \cdot S = T' \cdot T' \cdot (2', 1)$$

Poniendo en vez de S su igual $T' \cdot S'$ se obtiene,

$$T' \cdot S' \cdot T' \cdot S' = T' \cdot T' \cdot (2', 1)$$

de donde

$$(2', 1) = S' \cdot S'$$

Es decir, que para pasar de $2'$ a 1 hay que aplicar dos veces la traslación S' , lo cual significa que la recta $2'1$ es trayectoria de la traslación S' y paralela por lo tanto a la $1' \frac{1}{2}$.

De este modo queda justificada la existencia del punto de abscisa $\frac{1}{2}$ como intersección del eje x con la trayectoria de la traslación S' a partir de $1'$, pero a condición de probar que ambas rectas se cortan. Esto que intuitivamente aparece como cierto, no puede, sin embargo, deducirse de los axiomas anteriores y necesita por lo tanto de uno nuevo, el llamado «axioma del entre» en el plano, que puede enunciarse así: *toda recta que corte a un lado de un triángulo, corta también a uno de los otros dos lados*, hecho trivial para nuestra intuición.

Consideraciones análogas conducen a asignar a cada número racional un punto representativo situado sobre el eje x . Después de esto, es sumamente fácil deducir de los axiomas que en el interior de cada segmento, por pequeño que sea, existen *puntos racionales*. Ahora bien, como estos puntos no llenan la recta, se hace preciso considerar también los que de este modo quedan sin abscisa, lo cual se consigue por medio del anteriormente enunciado axioma de la continuidad. Este puede formularse con más precisión de la manera siguiente: *Existen infinitos puntos del eje x , y traslaciones a lo largo de éste, que respecto de los puntos racionales guardan las mismas relaciones de orden y continuidad, que las que existen entre los números irracionales y los racionales*. Este axioma ofrece grandísimo interés porque su obtención representa el proceso inverso al que se siguió para introducir en la Aritmética los números irracionales basándose en la consideración de la continuidad de la recta. Con la admisión de este axioma, *queda establecida una correspondencia biunívoca entre todos los puntos del eje x y todos los números reales positivos y negativos*. Es evidente que lo mismo puede hacerse con los puntos del eje y .

El modo de establecer sobre el eje x una escala de unidad arbitraria corresponde a la experiencia de hacer moverse un cuerpo rígido (por ejemplo, la distancia entre las puntas de un

compás) a lo largo de una recta. Esta traslación del plano a lo largo del eje x , puede ser expresada por la ecuación

$$x' = x + a$$

que indica que a cada x , hay que agregarle el segmento a , que puede ser racional ó irracional, positivo o negativo; y la análoga a lo largo de y , por la

$$y' = y + b.$$

Aplicando sucesivamente ambas traslaciones (fig. 110), el punto O se convertirá en el P , cualquiera que sea el orden en

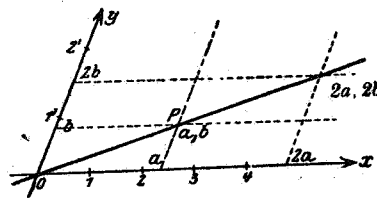


Figura 110

que lo hagamos (a causa de la ley conmutativa); diremos entonces que el punto P tiene la abscisa a y la ordenada b .

Recíprocamente, a cada punto P se le pueden hacer corresponder dos números a y b . Para ello basta descomponer la traslación de P a O en dos paralelas a los ejes. De este modo, los puntos del plano quedan enlazados por una correspondencia biunívoca con todos los pares posibles de números reales (a, b) , con lo cual queda definido un sistema de coordenadas.

Para obtener la ecuación representativa de la recta, consideremos primero la que una O con $P(a, b)$. Esta recta contendrá todos los puntos que se obtienen repitiendo la traslación (OP) ; es decir, los definidos por las ecuaciones:

$$x = \lambda a, \quad y = \lambda b$$

en las cuales λ es un número entero. Por otra parte, es evidente que los puntos resultantes de valores fraccionarios e irracionales de λ , pertenecen también a la recta y que entre ellos y los

primeros la llenan por completo. Eliminando, pues, λ se obtiene la ecuación de la recta OP :

$$x : y = a : b \quad \text{ó} \quad bx - ay = 0$$

que prueba que toda ecuación de la forma general

$$\alpha x + \beta y = 0$$

representa una recta que pasa por el origen de coordenadas. Las demás rectas, o sea, las que no pasan por O , se obtienen fácilmente de éstas por medio de una traslación. La ecuación anterior, toma en este caso la forma:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0;$$

luego, una recta cualquiera está representada por una ecuación de primer grado, razón por la cual estas ecuaciones reciben el nombre de *lineales*.

De este hecho se deducen sin dificultad, por los conocidos métodos de Geometría analítica, multitud de propiedades geométricas. Sin entrar en más pormenores, baste decir que así se puede deducir *toda la Geometría afín*, y, por consiguiente, también *toda la Geometría proyectiva*; y ello basándose sólo en los postulados especiales sobre las ∞^2 traslaciones. Sólo un hecho, que habrá de ser utilizado más adelante, haremos resaltar aquí. Anteriormente, basándonos en los axiomas de la Geometría proyectiva, habíamos demostrado el *teorema de Möbius*, de que toda *colineación* es una transformación *proyectiva*, es decir, que puede ser representada por una sustitución lineal, entera o fraccionaria, de las coordenadas. Ahora bien, según nuestras primeras hipótesis, los movimientos son colineaciones, en las que a todo punto propio corresponde otro punto también propio, y, por otra parte, tenemos ahora ya toda la Geometría proyectiva; luego también el teorema de Möbius es válido, desde nuestro punto de vista, y, en consecuencia, *todo movimiento está necesariamente representado por una transformación lineal entera de las coordenadas paralelas, x , y , antes introducidas*.

Si pasamos ahora a los *conceptos métricos de la Geometría*,

se ve, que para definir la *distancia* entre dos puntos (*) y el ángulo de las rectas, se necesita *del grupo completo de los movimientos*.

Consideremos la transformación llamada *giro*, que deja invariable un punto del plano, por ejemplo, el origen de coordenadas. Según el postulado general del movimiento, *dados dos semirrayos* Oa y Oa' *de origen común existe un giro que lleva uno de ellos a coincidir con el otro* (fig. 111). En cierto modo, estos giros pueden mirarse como correlativos de las traslaciones, ya que dejan invariable un punto del plano, mientras que

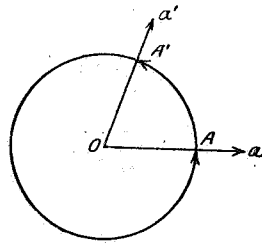


Figura 111

éstas dejan invariable una recta. También supondremos que el *giro* es una transformación continua, a partir de la posición primitiva y hablaremos, como antes, de la *trayectoria curvilínea* de cada punto.

Existe, sin embargo, entre traslación y giro, una diferencia esencial que puede ser expresada con el siguiente axioma particular: *Los semirrayos* a' , a'' , ... *que se obtienen por reiteración del mismo giro del* a , *alrededor de* O *llegan a coincidir con cualquier semirrecta de origen* O , *o a comprenderla entre dos de ellos* (mientras que una traslación sólo da los puntos de una semirrecta).

En particular, el giro permite que una semirrecta vuelva a su posición primitiva, con lo cual cada punto de ella vuelve a

(*) Hasta ahora no hemos definido más que los segmentos sobre los ejes.

ocupar su posición primitiva, luego: *las trayectorias de los puntos son líneas cerradas que cortan a toda semirrecta de origen O en un punto A , de tal manera, que todos los segmentos OA son congruentes entre sí (es decir, superponibles por un movimiento); son, pues, lo que ordinariamente se llama *circunferencias de centro O* .*

Con el auxilio del giro y mediante la admisión de ciertas hipótesis de continuidad, puede fijarse análogamente a lo hecho con las traslaciones en la recta, una escala en un haz de semirrayos, que haga corresponder a cada uno de ellos un número real, que mida el *ángulo del giro*, y recíprocamente. En virtud de la periodicidad del movimiento, parece apropiado escoger como unidad el *giro completo*, o sea, el que transforma una semirrecta en sí misma, pero ordinariamente se toma como

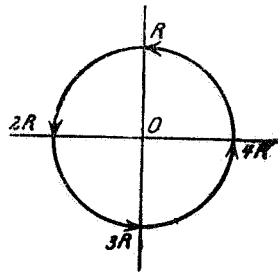


Figura 112

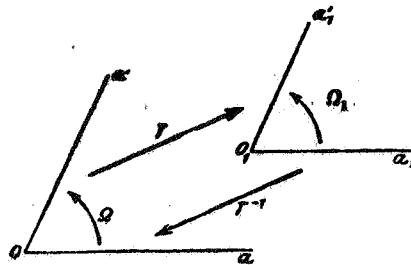


Figura 113

unidad la cuarta parte de él, cuyo ángulo se llama *recto*; todo giro queda medido por un ángulo $\omega \cdot R$, donde ω puede ser cualquier número real, pero que, por la periodicidad, puede suponerse que no toma otros valores que los comprendidos entre 0 y 4 (fig. 112).

Del mismo modo se puede establecer alrededor de cualquier otro punto O_1 una escala de medida de ángulos, siendo fácil probar, mediante la traslación, que pueden hacerse coincidir las *escalas correspondientes al punto O y al O_1* . Sean, en efecto (figura 113), a_1 y a'_1 dos semirrayos dados en el haz O_1 ; T la

traslación que transforma O en O_1 ; a y a' los dos semirrayos en que a_1 y a'_1 se convierten por medio de la traslación recíproca T^{-1} ; entonces, si es Ω el giro alrededor de O , que transforma a en a' , el Ω_1 , que convierte a_1 en a'_1 se obtiene por la aplicación sucesiva de T^{-1} , Ω y T , que puede formularse simbólicamente así:

$$\Omega_1 = T^{-1} \Omega T$$

porque el segundo miembro representa también un movimiento que transforma $O_1 a_1$ en $O'_1 a'_1$ y este movimiento está completamente determinado. Se atribuye, pues, a Ω_1 el mismo ángulo $\omega \cdot R$, antes asignado a Ω . Si ahora hacemos un segundo giro Ω' , alrededor de O , le corresponderá en el O_1 el ángulo

$$\Omega'_1 = T^{-1} \Omega' T$$

y el resultado de los dos giros sucesivos Ω y Ω' es

$$\Omega_1 \Omega'_1 = T^{-1} \Omega T T^{-1} \Omega' T = T^{-1} (\Omega \Omega') T$$

equivalente a $\Omega \Omega'$. La escala obtenida en el haz O_1 por traslación del haz O es, por lo tanto, la misma que se obtendría directamente por repetición del primer giro Ω_1 .

La mayor parte de los libros de texto elementales contienen una proposición, enunciada por Euclides, que dice que *todos los ángulos rectos son congruentes*. Nada se perdería con suprimir este teorema que todos los alumnos miran como evidente, sin comprender toda su significación. Como se ve en seguida, coincide con el que acabamos de demostrar y quiere decir que dos ángulos definidos por giros iguales alrededor de dos puntos distintos, pueden hacerse coincidir por medio de un movimiento.

Definido ya, de un modo general, el ángulo, definiremos *la distancia entre dos puntos cualesquiera*, pues hasta ahora, solamente pueden ser comparadas por traslación las que pertenezcan a una misma recta. Supongamos para ello que sobre el eje x , y a partir de O , por ejemplo, llevamos una distancia r (figura 114); podemos llevarla, por medio de un giro alrededor de O sobre cualquier recta a' que pase por O , y de la misma manera, de un modo general, toda la escala de longitudes del eje

x ; podrá ser llevada sobre a' y, después, por una traslación a cualquier recta paralela a la a' y, en consecuencia, a cualquier recta dada. Podemos, pues, en efecto, medir la distancia entre dos puntos cualesquiera, trazando la recta que los une y llevándola sobre ella, del modo indicado, la escala del eje x . En particular, podemos suponer que la escala primeramente escogida para el eje y se ha obtenido así de la relativa al eje x .

El empleo del giro permite también completar el sistema de la Geometría analítica, con la introducción de las *coordenadas rectangulares*.

Según en otro lugar hemos dicho (pág. 180), todo movimiento

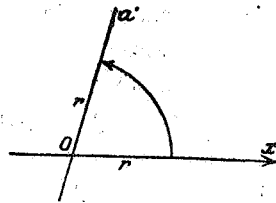


Figura 114

miento representa una sustitución lineal de las coordenadas, de la forma :

$$\begin{cases} x' = (a_1x + b_1y + c_1) : N \\ y' = (a_2x + b_2y + c_2) : N \end{cases}$$

Para que un punto propio se transforme siempre en otro de igual condición, es preciso que el denominador N sea constante; podremos, pues, suponer que es la unidad.

Si el movimiento es un giro alrededor del origen será $c_1 = c_2 = 0$, y queda

$$(1) \quad \begin{cases} x' = a_1x + b_1y \\ y' = a_2x + b_2y. \end{cases}$$

Si la amplitud del giro ha de ser un *ángulo recto* y utilizamos coordenadas rectangulares, el eje x se transformará en el y , y éste en la parte negativa del primero. En este caso, las ecuaciones son

$$(2) \quad \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Para que estas fórmulas sean legítimas es preciso que exista un grupo simplemente infinito de sustituciones (1) que contengan la sustitución (2), de tal modo que si ω es un parámetro real, toda sustitución del grupo pueda obtenerse repitiendo ω veces la sustitución (2). Esto significa, si ω es un número racional $\frac{p}{q}$, que repitiendo p veces la sustitución (2) se obtiene q veces la (1). Si es irracional se procederá de manera análoga por aproximación con números racionales, legítima en virtud de la continuidad.

Antes de pasar más adelante, conviene advertir que no podemos suponer ningún conocimiento geométrico especial sobre las fórmulas de giro de un sistema de coordenadas rectangulares; pero podemos, sin inconveniente alguno, suponerlos conocidos en Análisis. Esta manera de proceder no es, ciertamente, utilizable en la enseñanza media, pero en cambio es muy simple y elegante.

Comencemos por notar que el giro (2) puede expresarse, utilizando números complejos, en la siguiente forma

$$(2) \quad x' + iy' = i(x + iy)$$

Repitiendo la sustitución se obtiene

$$x' + iy' = i^2(x + iy)$$

ecuación que sólo se diferencia de la precedente en que tiene el factor i^2 en lugar de i . Aplicando el principio de inducción, resulta que un giro del plano, de amplitud ω , en torno del origen O se puede representar analíticamente por la ecuación

$$(3) \quad x' + iy' = i(x + iy)$$

Al seguir este procedimiento, necesitamos utilizar las propiedades de la función exponencial e^z y, entre ellas, la relación que la liga con las funciones trigonométricas, expresada por la fórmula de Euler

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$$

sin que, por ahora, pensemos para nada en su significación geométrica. Así conocemos el número π definido por la fórmula $e^{i\pi} = -1$, y es

$$i = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

La potencia i^ω está así definida, sin ambigüedad, por la fórmula

$$i^\omega = e^{\omega \frac{i\pi}{2}} = \cos \frac{\omega \pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\omega \pi}{2}$$

Sustituyendo este valor en la fórmula (3) y separando las partes reales y las imaginarias, resulta:

$$(4) \quad \begin{cases} x' = \cos \frac{\omega \pi}{2} \cdot x - \operatorname{sen} \frac{\omega \pi}{2} \cdot y \\ y' = \operatorname{sen} \frac{\omega \pi}{2} \cdot x + \cos \frac{\omega \pi}{2} \cdot y \end{cases}$$

fórmulas que, con símbolos analíticos más elementales, representan el grupo de los giros que se buscaba.

Este resultado indica la conveniencia de elegir *como valor*

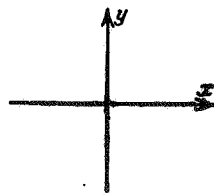


Figura 115

del ángulo recto el $\frac{\pi}{2}$ y no la unidad. A la escala así obtenida la llamaremos *escala natural de ángulos*, de la misma manera que hablamos de *logaritmos naturales*, como para significar que este concepto se basa en la naturaleza misma de los

cosas, aun cuando su descubrimiento, exija consideraciones más profundas.

Con esta escala natural, deberemos escribir simplemente ω en lugar de $\frac{\omega \pi}{2}$ y en lugar de las fórmulas (4) se obtienen las bien conocidas:

$$(5) \quad \begin{cases} x' = x \cdot \cos \omega - y \cdot \operatorname{sen} \omega \\ y' = x \cdot \operatorname{sen} \omega + y \cdot \cos \omega \end{cases}$$

Debemos ver ahora cuál es el contenido geométrico de estas fórmulas. Entre las propiedades geométricas que representan deben figurar *todos los teoremas elementales* que ordinariamente sirven de base para deducirlas.

1.º Sea un punto A del eje x que diste r del origen ($x=r$,

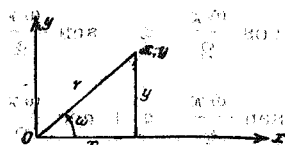


Figura 116

o sea $y=0$). Haciendo girar el segmento OA un ángulo ω , las fórmulas (5) dan:

$$(6) \quad \begin{cases} x = z \cos \omega \\ y = z \operatorname{sen} \omega \end{cases}$$

habiendo suprimido los acentos por razón de brevedad. Supongamos ahora, para fijar las ideas, que sea $\omega < \frac{\pi}{2}$ y consideremos el triángulo rectángulo (fig. 116) formado por el radio vector r del punto (x, y) , y sus dos coordenadas; las fórmulas (6) contienen entonces las relaciones entre sus lados y sus ángulos. De la relación $\operatorname{sen}^2 \omega + \cos^2 \omega = 1$, que aquí se sigue de la definición analítica de estas funciones, se deduce inmediatamente de (6):

$$(6a) \quad x^2 + y^2 = z^2$$

que expresa analíticamente el *teorema de Pitágoras*, y aparece así como *consecuencia de las hipótesis sobre los movimientos del plano*. Además, escribiendo las fórmulas (6) en la forma:

$$(6b) \quad \cos \omega = \frac{x}{z}, \quad \text{sen } \omega = \frac{y}{z}$$

se tiene la *significación trigonométrica de estas funciones angulares*, que comúnmente se emplea para definir las: coseno y seno son las razones del cateto contiguo y del opuesto, a la hipotenusa.

2.º Podemos ahora ver fácilmente la *expresión analítica general de los conceptos fundamentales, distancia y ángulo*, sin más que llevar los elementos dados, puntos o rectas, a la posición especial antes indicada, por medio de una traslación y un giro.

Dados dos puntos, de coordenadas x_1, y_1 y x_2, y_2 , respectivamente, si por medio de una traslación se lleva el primero a coincidir con el origen, las nuevas coordenadas del segundo son $x_1 - x_2$ e $y_1 - y_2$. Sustituídas en vez de x e y en (6a), resulta:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

fórmula que expresa analíticamente la distancia entre dos puntos.

Análogamente, si se tienen dos rectas representadas por las ecuaciones:

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \delta_1 = 0, \quad \alpha_2 x + \beta_2 y + \delta_2 = 0,$$

por medio del giro ω y aplicando la fórmula (6b), se obtiene:

$$\cos \omega = \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}$$

$$\text{sen } \omega = \frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}},$$

que determinan el ángulo que forman las dos rectas.

3.º Vamos a tratar, por último, de establecer el *concepto de área*, que hasta ahora no hemos utilizado para fundamentar la Geometría, aunque, en forma más o menos precisa, todos tienen idea de lo que es: cualquier aldeano sabe lo que significa que un campo tiene un área de un cierto número de metros cuadrados. Por esto, una vez que se ha fundamentado completamente la Geometría, como lo hemos hecho, sin utilizar este concepto fundamental, deberemos ligarlo al sistema construído, es decir, deberemos expresarlo en función de las coordenadas.

Para ello comenzaremos por una pequeña *consideración geométrica*, que difiere poco de lo dicho por Euclides y repetido en todos los libros elementales.

• Definiremos el área del *rectángulo* de lados *A* y *B* como *producto de A por B*. Sean ahora dos rectángulos o en gene-

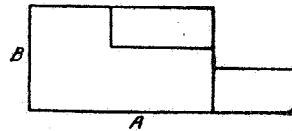


Figura 117

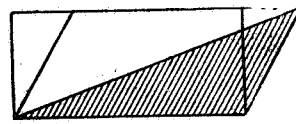


Figura 118

ral dos figuras cualesquiera; por la reunión de ambas se formará otra cuya área llamaremos *suma* de las áreas de las figuras componentes. De un modo análogo llamaremos a cada una de estas últimas *diferencia* entre la total y el área de la otra (figura 117).

Con estas definiciones es fácil obtener el *área del paralelogramo* de la de un rectángulo de igual base e igual altura al cual se quita un triángulo y se añade otro congruente con él (figura 118). El área del paralelogramo resulta, pues, igual al *producto de su base por su altura*. Descomponiéndolo por medio de una diagonal en dos triángulos congruentes, se obtiene que el área de un triángulo es igual a *la mitad del producto de su base por su altura*.

Si dos lados r_1 y r_2 del triángulo forman el ángulo ω , la altura será igual a $r_2 \text{ sen } \omega$, y el área

$$\Delta = \frac{r_1 r_2 \text{ sen } \omega}{2}.$$

Haciendo coincidir un vértice con el origen (fig. 119), y llamando x_1, y_1 y x_2, y_2 a las coordenadas de los extremos de r_1 y r_2 , la expresión anterior se convierte en

$$\Delta = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}$$

Se ve fácilmente que cualquier giro del sistema de coordenadas deja invariante esta expresión, de modo que, en efecto, se trata de un «concepto geométrico». En cuanto a la invariancia respecto de las traslaciones, se consigue con sólo genera-

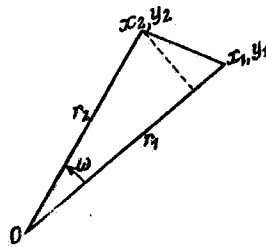


Figura 119

lizarla suponiendo que el vértice está en cualquier punto del plano, en vez de ser necesariamente el origen de coordenadas. La forma que toma en este caso es:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

expresión ya estudiada al comienzo de este libro, y las propiedades de los determinantes demuestran que el área que define puede sumarse y restarse. Se logra con esto la incorporación de la idea de área al sistema general de la Geometría analítica, pero se logra también algo más no contenido en el concepto intuitivo: que el área es una magnitud provista de *signo*, cosa de cuya importancia hablamos oportunamente (página 4 y siguientes).

4.º Otro concepto intuitivo digno de ser examinado, es el de *curva*. Todo el mundo cree saber perfectamente lo que es una curva, hasta que estudia suficientes Matemáticas para que sus ideas naturales se extravíen y confundan entre el cúmulo de enormidades que allí se ofrecen (*).

Sin penetrar en enojosos detalles, definiremos la curva como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son funciones continuas y derivables cuantas veces sea preciso de un parámetro: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Este concepto permite desarrollar todas las propiedades contenidas en la llamada *Geometría infinitesimal*, tales como los conceptos de *longitud de un arco*, *área*, *curvatura*, *evoluta*, etc. La idea fundamental de esta teoría consiste en considerar una curva como límite de un polígono rectilíneo inscrito en ella (fig. 120). Si las coordenadas de dos

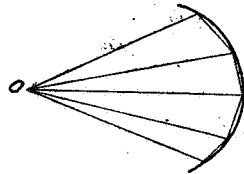


Figura 120

vértices sucesivos son x , y , y $x + dx$, $y + dy$, aplicando el teorema de Pitágoras, resulta para longitud del arco, la fórmula:

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

De la expresión del área del triángulo con un vértice en O , se deduce que el área de un sector comprendido entre una curva y dos radios vectores es

$$\frac{1}{2} \int (x dy - y dx).$$

(*) Para orientarse en esto, léase el artículo de *v. Mangoldt*, *Die Begriffe «Linie» und «Fläche»* en la *Enzyklopädie der math. Wissenschaften* (III A. B. 2).

De un modo análogo se obtienen multitud de fórmulas.

Con esto damos por terminada la exposición de una primera manera de construir la Geometría, cuya característica era partir de la existencia y encadenamiento del grupo de movimientos, de tres parámetros, e introducir en seguida la consideración de las coordenadas para poder razonar en el campo aritmético. Pero hay un segundo modo de proceder, en cierto modo opuesto al primero, para fundamentar la Geometría, el cual conduce directamente a la Geometría métrica y, desde muy antiguo, ha desempeñado preponderante papel. A este método dedicaremos el próximo paragrafo.

2. *Otro modo de fundamentar la Geometría métrica; papel que desempeña el axioma de paralelismo.*

Los fundamentos de la Geometría métrica pueden también establecerse *excluyendo sistemáticamente el empleo de la noción de movimiento*. La preferencia de que este método gozaba en la antigüedad y disfruta aún en nuestros tiempos, se debe no solamente al temor de introducir con la idea de movimiento, un elemento extraño, el concepto de tiempo, sino también a la consideración de que el concepto de movimiento de los cuerpos rígidos carece en sí mismo de un significado preciso, siendo preciso para dárselo, apoyar su definición en el concepto de distancia. A ello contestan los empiristas que la idea abstracta de distancia se deriva de un modo natural de la existencia de cuerpos *suficientemente rígidos*.

Dejando a un lado estas discusiones de índole filosófica vamos a desarrollar las ideas capitales de este segundo sistema.

1.º Se comienza, lo mismo que antes, aceptando como conceptos primitivos los de *punto* y *recta* y enunciando los axiomas de *enlace*, *ordenación* y *continuidad*.

2.º Después se introducen—y esto es aquí nuevo—las nociones de *distancia entre dos puntos (segmento)* y *ángulo de dos rectas* y se establece una serie de axiomas que en esencia expresan que *segmentos y ángulos pueden ser medidos con números de la manera conocida*.

3.º Como cosa característica, los axiomas del grupo de los

movimientos se sustituyen por el *primer teorema de congruencia* que dice que *dos triángulos que tengan iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes*, es decir, *pueden coincidir en todas sus partes*. En el sistema anterior, esta propiedad es demostrable, pues siempre existe un movimiento que permite (fig. 121) llevar AB sobre $A'B'$; en virtud de la hipótesis AC coincide con $A'C'$ y, por lo tanto, BC con $B'C'$, quedando los dos triángulos superpuestos. En cambio, si el concepto de movimiento no se admite como legítimo, la propiedad es imposible de demostrar y se hace preciso aceptarla como un axioma más.

4.º A partir de aquí el proceso de construcción de la Geometría es el contrario que en el primer modo, ya expuesto. Esto es lo que se hace en la enseñanza geométrica elemental, siguien-

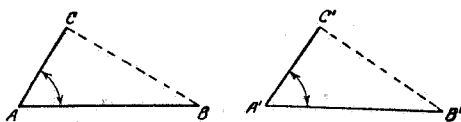


Figura 121

do en lo esencial a *Euclides*; se demuestra primero el teorema de Pitágoras y se introducen después las funciones trigonométricas *cos*, *sen*, partiendo de la consideración de los triángulos; y con ello, ya se sigue utilizando el mismo aparato analítico que antes.

5.º Procediendo así, es necesario otro importante axioma, que se refiere a la teoría de las paralelas. Cuando la Geometría se basa en el estudio de los movimientos del plano, el paralelismo aparece de un modo natural, sólo con definir como rectas paralelas, las trayectorias de los diversos puntos de una misma traslación.

Si por el contrario se prescinde sistemáticamente del empleo de la noción de movimiento, el paralelismo constituye un concepto aparte y sin conexión alguna con los admitidos precedentemente. Por esta causa se hace preciso introducirlo de un modo axiomático; considerando para ello, un punto O exterior a una

recta g (fig. 122), y uniendo O con un punto P de g , al cual se le va haciendo recorrer la recta, pasando por las posiciones P' , P'' , ... (es decir, de la sucesión de puntos P , P' , P'' , ... se deduce la sucesión de rectas OP , OP' , OP'' , ... sin que para nada intervenga la noción de movimiento). En este giro alrededor de O , el rayo OP tiene una posición límite, cuando P se aleja infinitamente, y esta *recta límite se designa como la paralela a g trazada por O* . Al proceder así, no se aprecia que necesariamente haya de obtenerse la *misma* recta límite de OP , cuando P se aleja infinitamente en los dos sentidos y, por con-

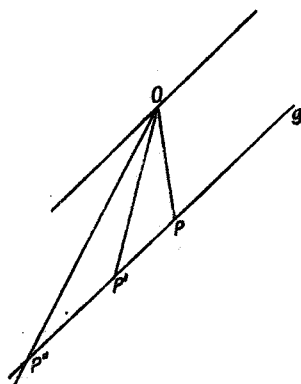


Figura 122

siguiente, hay la posibilidad abstracta de que por un punto pasen dos distintas paralelas a una misma recta.

Se llega así, en este modo de construcción de la Geometría, a un *nuevo axioma*, si, de acuerdo con lo que dicta la intuición, se establece que ambas posiciones límites coinciden, es decir, *por un punto exterior a una recta, sólo pasa una paralela a ella*. Este es el célebre *axioma de las paralelas* que ha suscitado durante largo tiempo enconadas discusiones y se le llama también *postulado de Euclides*, porque expresamente fué enunciado como postulado por el gran geómetra griego.

Por su importancia, conviene decir *algo acerca de la historia de este axioma*. Durante largo tiempo ha sido motivo de grandes esfuerzos y trabajos la *demonstración* del axioma, es decir, su deducción de los restantes axiomas geométricos. Estos

esfuerzos no han cesado todavía en absoluto, pues si bien es cierto que la Ciencia progresa indefinidamente, siempre hay personas que ignoran el resultado de las últimas investigaciones o que no reconocen el valor de ellas, considerando superior a todo el resultado de sus propios juicios.

Ya en el siglo XVIII las controversias sobre la demostración del postulado de Euclides habían tomado un sentido más amplio, y el estado del problema en aquellos tiempos puede resumirse en la siguiente pregunta: ¿Puede imaginarse un sistema geométrico exento de contradicciones, prescindiendo del postulado de Euclides y aceptando en cambio la existencia de dos paralelas a una recta por un punto? Esta duda fué resuelta a principios del siglo XIX por Gauss, que indudablemente fué el primero que reconoció la posibilidad de una *Geometría no euclídea* (denominación debida a Gauss y por todos seguida); aunque su manuscrito no haya sido impreso hasta 1900, formando parte del tomo VIII de las obras completas (*), se sabe positivamente que en 1816, ya estaba Gauss en posesión de este sistema geométrico.

El mismo Gauss, aparte pocas ocasiones en que, incidentalmente, algo dijo de ello, nada publicó sobre su gran descubrimiento. Independientemente de Gauss, el jurista *Schweikart* construyó en 1818 una Geometría no euclídea, a la que denominaba *Geometría astral* (*Astralgeometrie*), pero tampoco la publicó. Se sabe algo de ella por una carta dirigida a Gauss, encontrada entre la correspondencia de éste:

Las primeras publicaciones sobre Geometría no euclídea, proceden del autor ruso N. I. Lobatchefsky (1829), y del húngaro J. Bolyai de Bolya, el joven (1832), que trabajando independientemente obtuvieron el mismo resultado, del que se ha demostrado estaban ya en posesión en 1826 y 1823, respectivamente. Estas ideas se han difundido tanto durante el transcurso del siglo XIX que en la actualidad ninguna persona culta deja de conocer la existencia de una Geometría no euclídea, si bien sólo los que hayan hecho estudios especiales sobre Matemáticas pueden darse clara idea de lo que es tal Geometría.

(*) Leipzig, 1900.

Riemann dió una nueva e insospechada dirección a estos estudios con su memoria titulada «*Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la Geometría*» (*), en la cual hizo notar que todas las investigaciones anteriores presuponían la *infinitud de la línea recta*. Si por el contrario, se prescinde de esta propiedad, se hace necesario admitir que la recta es una línea cerrada como los círculos máximos de una esfera. Se trata aquí de la distinción entre las cualidades de *infinito* e *ilimitado* que se atribuyen al espacio, que se comprenden fácilmente con lo análogo en el espacio de dos dimensiones. Tanto un plano ordinario como una superficie esférica son ilimitados; en cambio, solamente el primero puede considerarse como infinito. Riemann admite que *el espacio es ilimitado, pero no infinito*, y entonces la recta es una línea cerrada cuyos puntos, a semejanza de los de la circunferencia, están dispuestos de tal modo que si hacemos a uno de ellos P recorrer la recta en un sentido, acabará por volver a la misma posición de partida, y la recta OP no tiene posición límite, de modo que *no existe ninguna paralela a la recta g por el punto O* . Basándose en estas consideraciones, puede desarrollarse *una segunda especie de Geometría no euclídea contraria* a la de Gauss, Lobatchefsky y Bolyai.

Estos resultados parecen paradójicos, pero los matemáticos advierten en seguida una relación entre *esta teoría y la de las ecuaciones cuadráticas*, que marca el camino para llegar al completo esclarecimiento de la cuestión. Una ecuación de segundo grado tiene, como es sabido, dos raíces reales diferentes o ninguna (dos imaginarias) o, como límite, una raíz real, que se cuenta como doble, propiedades completamente análogas a las de existencia de dos paralelas reales distintas, en la Geometría no euclídea de Gauss, la falta de paralelas reales en la de Riemann, y, finalmente, el caso límite de una paralela obtenida de dos modos distintos, en la Geometría euclídea.

La introducción de las Geometrías no euclídeas en la Matemática tiene una enorme importancia, sobre todo *en el aspecto filosófico*. En primer lugar ha permitido esclarecer la signifi-

(*) «*Über die Hypothesen die der Geometrie zu Grunde liegen*», 1854. Gesammelte math. Werke 2 Auflage (Leipzig, 1892), página 272 y sig.

cación exacta de los axiomas geométricos considerados desde el punto de vista de la lógica pura. En efecto, la existencia de dichas Geometrías, indica que el axioma de Euclides no es consecuencia de los demás, ya que admitiendo en su lugar otros distintos se obtienen Geometrías exentas de contradicción. Puede, por lo tanto, afirmarse, que *nuestro concepto intuitivo del axioma de las paralelas, no responde a ninguna exigencia lógica.*

En realidad, tampoco es absolutamente cierto que nuestra intuición espacial exija admitir la certeza del postulado de Euclides. Hay que tener en cuenta que una observación no puede considerarse nunca como complemento preciso porque a causa de la imperfección de nuestros sentidos, la diferencia entre dos magnitudes análogas, solamente es susceptible de ser apreciada en el caso de que exceda de cierto límite. Así, por ejemplo, si por un punto se trazan dos rectas (fig. 123), seguramente

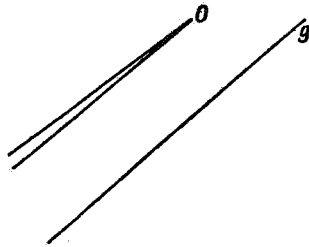


Figura 123

no podrán distinguirse una de otra si su ángulo es suficientemente pequeño, por ejemplo, 1" ó, si se quiere, una milésima de segundo, o aun más pequeño.

Esto indica que si se atiende solamente a los datos proporcionados por la intuición, es difícil afirmar que por un punto exterior a una recta pase una sola paralela a ella.

Si la distancia entre el punto y la recta es del orden de las que separan los cuerpos celestes, ya no puede prestarse confianza alguna a los resultados de una apreciación intuitiva, y ateniéndose a la definición de paralela como posición límite de un rayo giratorio, lo mismo puede aceptarse la existencia de una que la de dos. La Geometría de Lobatchefsky se adapta per-

fectamente a esta manera de considerar las cosas, pues dando un valor conveniente a la constante arbitraria que figura en sus fórmulas se puede hacer que el ángulo entre las dos paralelas sea muy pequeño, y que sólo adquiriera un valor apreciable cuando la distancia entre el punto y la recta sea enorme. Siendo, pues, nuestro concepto intuitivo del espacio tan poco preciso, y esto en una parte tan limitada de él y cercana a nosotros, no hay ningún motivo para rechazar la interpretación que la primera Geometría no euclídea nos proporciona.

Análogamente ocurre con la Geometría de Riemann.

La observación directa nos permite solamente prolongar la línea recta en un trozo limitado, hecho que por sí solo no autoriza para afirmar que su longitud sea infinita. Suponiéndola por el contrario finita, aunque de una longitud inconcebible por lo grande, las apariencias quedan satisfechas y la hipótesis de Riemann permite explicar los hechos intuitivos en la limitada porción del espacio accesible a nuestra observación sensorial.

La consideración de estos hechos tanto lógicos como intuitivos, desde un punto de vista puramente matemático, contradice abiertamente el concepto ortodoxo del espacio que muchos filósofos llaman kantiano, y según el cual, todas las proposiciones geométricas, tienen una certeza absoluta. Así se explica que la aparición de las Geometrías no euclídeas haya producido tan honda revolución en los círculos filosóficos.

El mejor método que puede utilizarse para *el estudio estrictamente matemático* de estas Geometrías es el proyectivo (*). Utilizaremos, pues, la Geometría proyectiva construída sobre los conceptos fundamentales de punto, recta y plano y los axiomas de ordenación, enlace y continuidad, tales como brevemente los hemos expuesto en el párrafo dedicado a fundamentos de la Geometría. Si las coordenadas homogéneas de un punto son $\xi : \eta : \zeta : \tau$ y las absolutas x, y, z , y las homogéneas de un plano $\alpha : \beta : \gamma : \delta$, la condición para que el primero esté contenido en el segundo está dada por la ecuación $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta\tau = 0$.

(*) Klein, «*Über die sogenannte nichteuclidische Geometrien*». Math. Annalen. Tomo. IV, página 573 y siguientes.

Sobre esta base hemos establecido la *Geometría euclídea ordinaria* con ayuda de la teoría de invariantes y del principio de Cayley, agregando la forma cuadrática

$$\Phi_0 = \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2$$

que igualada a cero, representa la curva esférica impropia.

El ángulo de dos planos

$$\omega = \arccos \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}$$

y la distancia entre dos puntos

$$r = \frac{\sqrt{(\xi_1 \tau_2 - \xi_2 \tau_1)^2 + (\eta_1 \tau_2 - \eta_2 \tau_1)^2 + (\zeta_1 \tau_2 - \zeta_2 \tau_1)^2}}{\tau_1 \tau_2}$$

eran, como ya indicamos, sencillos invariantes simultáneos de dichas figuras (dos planos o dos puntos) y la forma Φ_0 .

Para llegar de un modo análogo a establecer la *Geometría no euclídea*, tomaremos en vez de la curva esférica impropia $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$, otra forma cuadrática «próxima» a ésta, tal como

$$\Phi = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \varepsilon \cdot \delta^2$$

donde ε es un parámetro tan pequeño como se quiera, y para $\varepsilon=0$ es $\Phi=\Phi_0$. El número ε es tal que si $\varepsilon>0$ se obtiene la Geometría de Gauss; para $\varepsilon<0$, la de Riemann; y para $\varepsilon=0$, la euclídea ordinaria. Es condición esencial que el determinante de esta forma

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix} = -\varepsilon$$

sea, en general, distinto de cero. En los casos especiales en que se anule, $\Phi=0$ representará la curva esférica impropia.

De este modo sustituimos la primitiva forma cuadrática Φ_0 de determinante nulo por otra Φ en la cual éste no se anula (aunque su valor absoluto pueda ser tan pequeño como se quiera).

Para definir las magnitudes elementales en la Geometría no euclídea formaremos invariantes de Φ y de la figura formada por dos puntos o dos planos, análogos a los que utilizábamos en la euclídea derivados de la forma especial $\Phi_0 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, siguiendo así el camino iniciado por Cayley en 1859 (*), con la afirmación de que *se puede definir un sistema de medidas en relación con una cuádrlica cualquiera (por ejemplo la $\Phi=0$), lo mismo que se hace en relación con la curva esférica impropia*. Por la brevedad a que nos obliga la índole de este libro, nos limitaremos a tratar este asunto analíticamente que es el medio más seguro de obtener una rápida y clara concepción de él, aunque reconociendo que el estudio queda incompleto sin proseguirle geoméricamente como lo hemos hecho en nuestro trabajo publicado en el tomo IV de *Mathematische Annalen*.

Sean en primer lugar dos planos. La expresión de la medida de su ángulo respecto de la superficie $\Phi=0$, se obtendrá naturalmente, generalizando la expresión correspondiente en la Geometría euclídea, con lo cual se obtiene:

$$\omega = \arccos \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 - \varepsilon \delta_1 \delta_2}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - \varepsilon \delta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 - \varepsilon \delta_2^2)}}$$

invariante que para $\varepsilon=0$ da el valor euclídeo del ángulo.

Como el determinante no se anula, no es tan fácil obtener la *expresión de la distancia entre dos puntos*.

El procedimiento consiste en este caso en utilizar coordenadas puntuales, con lo cual el primer miembro de la ecuación tendrá la forma

$$f = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & \tau \\ \xi & \eta & \zeta & \tau & 0 \end{vmatrix} = \varepsilon(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \tau^2$$

(*) En su ya citado trabajo «Sixth. memoir upon quantics».

que como es sabido se deduce de la Φ en coordenadas tangenciales orlando su determinante con las coordenadas ξ, η, ζ, τ , con lo cual el valor de ω puede escribirse como cociente de la forma polar f y del producto de las raíces cuadradas de los valores de f para los puntos 1 y 2:

$$r = k \operatorname{arc} \cos \frac{\varepsilon(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2) - \tau_1 \tau_2}{\sqrt{\varepsilon(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - \tau_1^2} \sqrt{\varepsilon(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) - \tau_2^2}}$$

El factor k , además de permitir tomar como unidad un segmento arbitrario, es necesario en el paso a la Geometría euclídea, para lo cual debe tomarse *real cuando ε sea negativo e imaginario si ε es positivo*. Con ello r resulta real para todos los puntos reales o al menos (en el caso de que $\varepsilon < 0$) para los de un determinado recinto.

Así queda establecida una definición general de la distancia, y sólo falta demostrar que *para $\varepsilon = 0$ la expresión conduce al valor euclídeo*.

Si hacemos directamente $\varepsilon = 0$, el cociente resulta igual a 1 y $\frac{r}{k}$ es cero o un múltiplo de 2π .

Para evitar este resultado algo paradójico conviene poner en vez de $\operatorname{arc} \cos \alpha$, su equivalente $\operatorname{arc} \sin \sqrt{1 - \alpha^2}$, con lo cual la expresión de r toma la forma:

$$r = k \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{[\varepsilon(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - \tau_1^2][\varepsilon(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) - \tau_2^2] - [\varepsilon(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2) - \tau_1 \tau_2]^2}{[\varepsilon(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - \tau_1^2][\varepsilon(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) - \tau_2^2]}}$$

Para transformar convenientemente esta igualdad, formemos el producto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & \tau_1 & \tau_2 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\varepsilon [(\xi_1 \tau_2 - \xi_2 \tau_1)^2 + (\eta_1 \tau_2 - \eta_2 \tau_1)^2 + (\zeta_1 \tau_2 - \zeta_2 \tau_1)^2 -$$

$$- \varepsilon (\eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1)^2 - \varepsilon (\zeta_1 \xi_2 - \zeta_2 \xi_1)^2 - \varepsilon (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)^2]$$

cuya identidad con el numerador de r , es fácil de comprobar. Si después de esta sustitución hacemos $\varepsilon=0$, resultará lo mismo que antes $\frac{r}{k} = \arcsen 0=0$, por existir el factor $\sqrt{-\varepsilon}$; pero si en vez de esto, suponemos ε tan pequeño como se quiera, no solamente podemos considerar el arco igual a su seno sino despreciar todos los términos, tanto del numerador como del denominador, que contengan el factor ε . La expresión se simplifica así notablemente, tomando la forma, para una primera aproximación:

$$r = k \sqrt{-\varepsilon} \frac{\sqrt{(\xi_1 \tau_2 - \xi_2 \tau_1)^2 + (\eta_1 \tau_2 - \eta_2 \tau_1)^2 + (\zeta_1 \tau_2 - \zeta_2 \tau_1)^2}}{\tau_1 \cdot \tau_2}$$

Y ahora es cuando se emplea el artificio:

En vez de asignar a k un valor fijo, lo supondremos variable simultáneamente con ε , de tal modo que siendo $\lim \varepsilon=0$, se verifique también que $\lim(k \sqrt{-\varepsilon})=1$; con lo cual k resulta real o imaginario según que ε sea negativo o positivo. De este modo obtenemos por medio de un paso al límite la expresión que define la distancia entre dos puntos en Geometría euclídea.

De la interpretación geométrica de la forma f y de las demás expresiones precedentes, resultan las tres clases de Geometría; la de Lobatschefsky para $\varepsilon>0$; al de Riemann para $\varepsilon<0$; y para $\varepsilon=0$ la Geometría euclídea. Para más detalles remitimos al lector a nuestro ya citado trabajo del tomo IV de *Mathematische Annalen*, en el cual propusimos para las tres Geometrías los respectivos nombres, hoy de uso general, de *hiperbólica, elíptica y parabólica*, fundándonos en la analogía que existe entre la existencia de dos paralelas reales, dos imaginarias o una doble, con el número de asíntotas de las tres diferentes clases de cónicas.

Como ejemplo de esta interpretación geométrica, estudiaremos solamente el modo de desarrollar la teoría del paralelismo, tomando como base las expresiones analíticas que hemos

obtenido. Si escogemos el caso de la *Geometría hiperbólica plana*, la forma cuadrática será

$$\Phi = \alpha^2 + \beta^2 - \varepsilon \delta^2$$

que igualada a cero representa (por ser $\varepsilon < 0$) una cónica real, que podemos suponer elipse. La expresión de la distancia, toma en este caso la forma

$$r = k \operatorname{arc} \cos \frac{\varepsilon (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2) - \tau_1 \tau_2}{\sqrt{\varepsilon (\xi_1^2 + \eta_1^2) - \tau_1^2} \sqrt{\varepsilon (\xi_2^2 + \eta_2^2) - \tau_2^2}}$$

en la cual k es imaginario puro. El valor de r es real para todos los puntos *interiores* a la cónica, entendiéndose por tales,

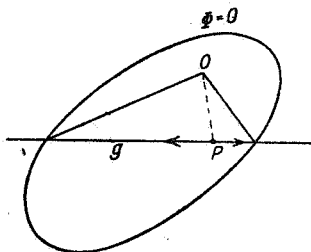


Figura 124

las que carecen de tangentes reales a ésta. Con ello, *el recinto operatorio de la Geometría hiperbólica real, queda limitado a los puntos y segmentos rectilíneos interiores a la cónica*; los puntos de la cónica representan la infinitud (fig. 124), pues, de la expresión anterior se deduce que la distancia de un punto cualquiera de la cónica o otro situado en el interior de ella, se hace infinita.

Según esto, toda recta tiene *dos puntos del infinito* que son los de intersección con la cónica, y sobre cada semirrecta sólo *uno*. Si suponemos ahora un punto O fuera de la recta g (figura 124), y le unimos con dichos dos del infinito, resultarán dos rectas, que, según la definición admitida, serán paralelas a la primera. *Existen, pues, dos paralelas distintas a una misma recta.*

Una observación conviene hacer en este punto, comparan-

do con lo que ocurrió al fundamentar del primer modo la Geometría euclídea. Partíamos allí de la consideración del grupo de movimientos constituido por todas las colineaciones que dejan invariables las razones de distancias. En la Geometría no euclídea, existe también este grupo; en efecto, la ecuación homogénea de segundo grado tiene 10 términos, es decir, nueve constantes esenciales; por otra parte la colineación más general en el espacio tiene quince parámetros arbitrarios, de modo que existen ∞^6 colineaciones que transforman una forma cuadrática dada, por ejemplo, la Φ , en sí misma y ésta es precisamente la condición de invariancia de aquellas razones. Puede asegurarse, pues, que en la Geometría no euclídea existe un grupo de «movimientos», seis veces infinito, que dejan invariables ω y r . El número de parámetros de este grupo se reduce a tres en el plano, como antes.

Podemos, por tanto, construir también cualquier Geometría no euclídea, partiendo de la existencia de un grupo de movimientos, y falta sólo precisar cómo con la construcción anterior sólo se ha llegado a la Geometría euclídea. Para resolver esta dificultad, bastará recordar que nos basábamos en el subgrupo de las traslaciones, cuyas trayectorias eran líneas rectas. Este subgrupo no existe en ninguna de las Geometrías no euclídeas, de modo que postulando su existencia, como entonces lo hicimos, éstas quedan absolutamente excluidas y resulta sola la euclídea.

Terminado con esto el estudio de lo esencial de las Geometrías no euclídeas, lo completaremos con las siguientes observaciones de carácter general.

1. Ya hemos dicho que la significación filosófica de estas nuevas Geometrías no está aún completamente dilucidada. En cambio, en el aspecto matemático están hoy día tan perfectamente conocidas, que se las utiliza para muchos objetos, como, por ejemplo, en la moderna teoría de funciones, donde constituyen un poderoso medio auxiliar que permite estudiar, de un modo intuitivo, complicadas relaciones aritméticas.

2. Todo profesor de segunda enseñanza debe saber algo de Geometría no euclídea. El motivo de tal necesidad es que todo el mundo ha oído hablar de estas teorías y un profesor puede

en cualquier momento llegar a ser interrogado sobre ellas. Un profesor de Matemáticas que no supiese decir nada de Geometría no euclídea, haría tan mal papel como uno de Física que ignorase lo que son los rayos Röntgen o el radio.

3. En cambio, creemos que *estas teorías no deben ser llevadas a clase*, normalmente, como los entusiastas propugnan, exceptuando naturalmente casos particulares en que un alumno esté especialmente interesado en conocerlas. En general, puede considerarse como un resultado satisfactorio el llegar a conseguir que los alumnos conozcan bien la *Geometría euclídea*.

Esto no contradice en nada lo anteriormente dicho, pues lo menos que puede exigirse a un maestro es que sepa un poco más que la generalidad de sus discípulos.

La aparición de las Geometrías no euclídeas en el campo científico ha producido un poderoso movimiento de avance, fundado, principalmente, en el hecho de la independencia del postulado de Euclides respecto de los demás axiomas. Del estudio general de la independencia lógica de los axiomas entre sí, ha nacido la moderna *Axiomática*, cuyos métodos de investigación consiste en ensayar el desarrollo de una rama de la Geometría en que se prescinda de algún axioma o se acepte otro contrario a él. De este modo, pueden llegar a establecerse sistemas exentos de contradicción, y por lo tanto, lógicamente irrefragables, que cabe considerar como *Pseudogeometrías*. Entre los tratados en que se sigue este camino, el más importante es sin duda el de Hilbert, titulado «*Fundamentos de la Geometría*» (*), cuyo principal objetivo consiste en fijar la *significación de los axiomas de continuidad*. Para conseguirlo es preciso, naturalmente, ordenar el sistema de axiomas geométricos de tal modo que los de continuidad queden en último lugar. Si se quiere obtener al mismo tiempo la Geometría no euclídea, es también claro que no se puede utilizar el primero de los dos sistemas axiomáticos desarrollados en este libro, sino el segundo, que cumple la condición de desenvolverse en su mayor parte sin el auxilio del axioma de las paralelas.

Teniendo en cuenta estas dos consideraciones, Hilbert in-

(*) «*Grundlagen der Geometrie*» 5 Auflage. Leipzig-Berlín, 1922.

vestiga hasta qué punto es posible construir la Geometría sin utilizar los axiomas de continuidad, y desarrolla simultáneamente las «Pseudogeometrías» que resultan negando estos axiomas y admitiendo los restantes, es decir, prescindiendo del conjunto de todos los hechos referentes a la correspondencia biunívoca de los puntos de una recta con los números reales (abscisas):

No podemos entrar aquí en un estudio de detalle de los interesantes resultados obtenidos por Hilbert en sus investigaciones sobre la dependencia lógica de ciertos axiomas y teoremas, que deben leerse en la obra original; nos limitaremos a recordar que en la primera parte de esta obra, indicamos ya algo sobre la *Geometría no arquimediana* o Pseudogeometría en la cual no se verifica el *axioma de continuidad de Arquímedes*, hoy más llamado de Eudoxio, es decir, aquella en que las abscisas de dos puntos pueden diferenciarse en un «infinitamente pequeño actual» tal que ninguno de sus múltiplos es igual a un número real, finito, ordinario.

Para terminar esta breve nota sobre la moderna axiomática, diremos algunas palabras acerca de la *verdadera naturaleza de los axiomas y teoremas geométricos*. Ya hemos dicho que matemáticamente el problema se reduce a admitir una serie de conceptos fundamentales y axiomas que permitan, apoyándose en ellos, desarrollar la Geometría de un modo rigurosamente lógico. Con esto, sin embargo, no queda resuelta la duda de cuál es el origen de dichos conceptos fundamentales y axiomas, es decir, si pueden o no considerarse por su evidencia manifiesta, como procedentes de la intuición inmediata de todo ser humano.

El interés que despierta este problema, se ha agudizado con la aparición de las Geometrías no euclídeas, que muestran que ni la lógica ni la intuición obligan a adoptar el postulado de Euclides, sino que, por el contrario, aceptando hipótesis contradictorias, no solamente se llega a establecer sistemas lógicos rigurosos, sino a explicar los hechos intuitivos con una aproximación satisfactoria, y, por consiguiente, puede tomarse el que permita exponer las relaciones de las figuras del espacio de la manera más sencilla, y decir que los conceptos primitivos y los axiomas no son hechos de intuición inmediata sino abstracciones de estos hechos convenientemente seleccionados. El mismo

concepto preciso de punto no existe en la intuición sensible inmediata, sino que es un falso límite, que asimila nuestra idea de punto a una pequeña porción del espacio, cuyas dimensiones tienden a ser nulas. También hay quien considera *los axiomas como convenios arbitrarios y los conceptos primitivos como nombres convencionales de las cosas con que se opera*. Este modo de pensar encierra algún fondo de verdad, pues es cierto que dentro de la *Lógica pura*, no existe fundamento alguno para enunciar tales o cuales axiomas, pero algunos autores se han mostrado tan exageradamente exclusivistas en este sentido, que la axiomática ha venido a seguir aquella dirección filosófica que los antiguos llamaron *nominalismo*, y que tiene por norma prescindir en absoluto de la esencia de las cosas, dando importancia solamente al esquema lógico que permite operar con los nombres o signos que las representan. Se llama entonces punto al conjunto de tres coordenadas y sin preocuparse de lo que pueda significar tal concepto, se establece una serie de axiomas arbitrarios que expresan las relaciones entre puntos. El desarrollo ulterior consiste en enunciar y demostrar todas las proposiciones que puedan deducirse de los axiomas, por el empleo exclusivo de las reglas de la Lógica y cuidando únicamente de no caer en ninguna contradicción. Lejos de compartir la concepción nominalista, creemos que lleva aparejada la muerte de la ciencia y que *los axiomas de la Geometría no son proposiciones arbitrarias, sino razonables, que tienen su origen en la intuición espacial y cuyos pormenores están regulados por razones de conveniencia*.

Frente a estas consideraciones filosóficas que nos han ocupado últimamente, queremos añadir algunas sobre *Historia de la Geometría*, en particular en lo que se refiere a sus fundamentos. Contrariamente a lo que dijimos en *Álgebra*, *Aritmética* y *Análisis*, cuya forma actual sólo tiene historia de muy pocos siglos, pues empieza alrededor de 1500 con el cálculo de fracciones decimales y el cálculo literal, *la Geometría, como disciplina independiente, se remonta a la antigüedad griega* en cuya época alcanzó tan brillante desarrollo que la Geometría griega ha sido considerada durante muchos siglos, y aun hoy día se considera, como el prototipo de una Ciencia perfectamente aca-

bada e incommovible. La obra representativa del saber geométrico de aquella época, es el famoso tratado llamado *Elementos* (στοιχεῖα) de *Euclides*, de tan extraordinario valor, que puede afirmarse que jamás otro alguno ha ocupado en la Ciencia tan preeminente lugar.

3. Los «Elementos» de *Euclides*.

En el aspecto filológico la mejor adición de esta obra es la publicada por *J. L. Heiberg* en Copenhague (*), a la cual está añadida una traducción latina del texto original. Esto es una gran ventaja aun para aquellos que hayan estudiado el griego, pues el estilo de *Euclides* tiene giros especiales que le diferencian bastante del griego que se aprende actualmente. Como lectura preparatoria para los *Elementos* de *Euclides*, son recomendables la «*Historia de las Matemáticas en la Antigüedad y Edad media*» (**), de *Zeuthen*, y «*Euclides y los seis libros de Planimetría*» (***) de *Max Simon*. Para penetrar a fondo en la materia es preferible leer primero la última de las obras indicadas, después la de *Zeuthen*, y estudiar por último el original de *Euclides* en el texto de *Heiberg*.

La personalidad de *Euclides* es muy poco conocida, sabiéndose únicamente que vivió en *Alejandro* hacia el año 300 antes de *Jesucristo*; se conoce en cambio bastante sobre el movimiento científico en *Alejandro* por tal época.

A la fundación del imperio de *Alejandro*, siguió la necesidad de recoger todo lo que en el orden científico había sido creado en los siglos precedentes, dándole unidad y formando con ello un sistema científico. Así se desarrolló la famosa *Escuela de Alejandro*, cuya enseñanza tenía algunos puntos de contacto con la universitaria actual, ya que su papel era recoger y ordenar los materiales procedentes de la libre investiga-

(*) *Euclides opera omnia*. Tomos I-IV. *Elementa* (Leipzig, 1883-85).

(**) Copenhague, 1896.

(***) Leipzig, 109. *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaft*. XI.

ción, no siendo, pues, de extrañar que tendiese en cierto modo al dogmatismo escolar.

Antes de entrar a fondo en el examen de los Elementos de Euclides es conveniente examinar la *significación científica de los «Elementos» y su lugar en la Historia*. Aunque para estudiar a fondo la personalidad de Euclides habría que conceder atención a sus numerosos pequeños trabajos, séanos permitido aquí prescindir de ellos y ocuparnos sólo de los «Elementos» en gracia a la enorme fama y difusión que han alcanzado, y a que desde nuestro punto de vista exigen una severa crítica.

Como fundamento de esta crítica hemos de hacer observar que el exagerado aprecio que se concede a los «Elementos» de Euclides procede de un *concepto equivocado de la cultura griega*, sumamente extendido durante muchos siglos y aún hoy mismo. Es creencia general que si bien los griegos penetraron solamente en pocos dominios de la cultura, su actuación en ellos fué tan definitiva, que los resultados que obtuvieron pueden considerarse como intangibles y eternos. Los progresos de la filología han demostrado lo erróneo de esta opinión, enseñándonos que los griegos, como ningún otro pueblo, han actuado en *todas* las ramas de la cultura humana de un modo digno de admiración, pero que considerando los resultados obtenidos por ellos en algunas ciencias desde el punto de vista actual, no tienen más valor que el de principios elementales, pudiéndose también asegurar que no existe ningún ramo de la cultura en el que sus conocimientos constituyan la cúspide de nuestras aspiraciones.

En lo que concierne especialmente a la Matemática, esta perspectiva errónea ha dado origen a la afirmación, como si se tratase de un dogma, de que los griegos se ocuparon principalmente de Geometría, pero que el sistema geométrico por ellos construído es de una perfección imposible de sobrepasar. Esta opinión ha conducido al *culto a los «Elementos» de Euclides* en los cuales se cree ver la base de todo sistema geométrico completo. Contra esta antigua y anticuada manera de ver nosotros afirmamos que *los griegos trabajaron también con fruto en las demás ramas de la Matemática, pero que en todas, in-*

cluso en la Geometría, su obra ha sido superada en la actualidad.

Para fundamentar y aclarar esta afirmación es preciso decir que Euclides al escribir sus «Elementos» no se propuso de ningún modo condensar en una enciclopedia la totalidad de los conocimientos geométricos de su época, puesto que entonces no hubiera prescindido de algunas teorías que, como la de las *secciones cónicas* y *curvas de orden superior*, habían sido ya estudiadas. (*), aunque hasta Apolonio (200 años antes de Jesucristo), no alcanzasen su forma completa. El papel verdadero de los «Elementos» de Euclides fué el de una *introducción al estudio de la Geometría* y de la Matemática en general, con la tendencia de tratar ésta según las ideas de la escuela platónica, como *preparación para estudios filosóficos generales*. Así se comprende la razón de que la obra fundamental esté escrita atendiendo en primer lugar a la conexión lógica, que ha de dar por fruto un sistema completo de Geometría, mientras que las aplicaciones prácticas estén excluidas sistemáticamente. En dicho sistema Euclides sobrepasó en algunas partes los conocimientos teóricos de su tiempo, ya que no todos estaban suficientemente desarrollados para su adaptación. Para hacer ver la *limitación de materia de los «Elementos» de Euclides* frente a la totalidad de la Matemática griega es conveniente hacer una comparación con el *primer matemático griego, Arquímedes*, que vivió en Siracusa poco después de Euclides, hacia el año 250 antes de Jesucristo. La comparación hace resaltar las siguientes diferencias:

1. Contrariamente a lo que ocurre en los Elementos de Euclides, en Arquímedes se encuentra fuertemente desarrollado el *sentido del cálculo numérico*. Basta recordar el *cálculo del número π* por medio de polígonos regulares y el valor aproximado $\frac{22}{7}$ que para este número obtuvo. En Euclides, en cambio, no se encuentran ni huellas de tal interés por el cálculo numérico, pues, si bien nos dice que las áreas de dos

(*) El mismo Euclides escribió un trabajo sobre cónicas que no ha llegado a nuestras manos.

círculos son proporcionales a los cuadrados de sus radios y las longitudes, de dos circunferencias a sus radios, ni siquiera enseña el cálculo del factor de proporcionalidad, o sea, del número π .

2. Es característico de Arquímedes el *interés por las aplicaciones de todas clases* que le llevan a tratar numerosos problemas físicos y técnicos. Es sabido que encontró el principio fundamental de la Hidrostática y que tomó parte en la defensa de Siracusa con potentes máquinas de su invención.

Euclides en sus «Elementos» prescinde de tal modo de las aplicaciones que los más sencillos instrumentos de dibujo, como la regla y el compás, no son ni siquiera mencionados. Postula en abstracto que por dos puntos pasa una recta y que dado un punto, con él como centro se puede trazar una circunferencia, pero no emplea una sola palabra en mostrar *cómo* se hace. En esto Euclides sigue las ideas de ciertas escuelas filosóficas antiguas, que consideraban las aplicaciones prácticas como algo manual e impropio de la Ciencia. Desgraciadamente esta manera de pensar está aún bastante extendida, y todavía existen profesores de Universidad que no conceden bastante importancia a las aplicaciones, teniéndolas por cosa accesorio. Contra tan orgullosa opinión debe lucharse sin tregua, apreciando por igual a los aptos para la teoría como a aquellos que lo sean para la práctica y dejando a cada cual que siga sus naturales inclinaciones y proporcionándole así múltiples direcciones en que ensayar su talento. Los más grandes matemáticos como Arquímedes, Newton y Gauss, han abarcado por igual la teoría y la práctica.

3. Finalmente, existe una diferencia que salta a la vista. Arquímedes fué un *gran investigador* que en cada uno de sus escritos avanza un paso más, sobre lo ya conocido, mientras que los «Elementos» de Euclides se reducen a *recoger y sistematizar* los materiales ya existentes. De aquí su diferente *forma de exposición*, como ya dijimos en el primer tomo refiriéndonos a ideas generales. En este concepto es característico un manuscrito (*) de Arquímedes encontrado en 1906, en el cual

(*) Heiberg und Zeuthen. «Eine neue Schrift des Archimedes». Leipzig, 1907. Bibliotheca mathematica 3. Folge, tomo 7, página 321 ff.

comunica a un amigo científico, sus últimas investigaciones sobre cubicación de cuerpos. El procedimiento de exposición es exactamente igual que nuestra manera de enseñar en la actualidad, pues procede *genéticamente*, indicando el proceso mental seguido y no utilizando nunca el rígido encadenamiento de «hipótesis», «tesis», «demostración» y «determinación», que domina en los «Elementos» de Euclides. Por lo demás, ya antes del descubrimiento del manuscrito citado, se sabía que los griegos, además de la cristalizada forma *euclídea* de exposición, usaban otra forma genética más libre; de la cual se servían, tanto el investigador en su trabajo, como el profesor en la enseñanza, forma que es muy probable que el mismo Euclides emplease en sus lecciones o en otros de sus trabajos. En Alejandría existía entonces algo semejante a nuestros apuntes litografiados, los llamados *Hipomnemata* que eran cuadernos sueltos reproducción de las conferencias orales.

Lo dicho es suficiente para comparar los «Elementos» con la totalidad de la producción matemática griega. Para finalizar la exposición de nuestras ideas, presentaremos algunos ejemplos demostrativos de que la *Matemática moderna* sobrepuja en mucho a la de los griegos.

Una de las diferencias más importantes estriba en que los griegos no poseían ni *Aritmética independiente*, ni fracciones decimales que tanto facilitan el cálculo numérico, ni el cálculo literal general, que son, como ya dijimos en el primer tomo, invenciones del Renacimiento; solamente tenían un *Cálculo en forma geométrica*, en el cual en vez de operar con números, se operaba por medio de construcciones con segmentos y otras magnitudes geométricas, lo que naturalmente, era extraordinariamente más complicado que nuestra Aritmética. También carecían del conocimiento de los *números negativos* y de los *imaginarios*, que tanta flexibilidad dan a la Aritmética y al Álgebra, y como consecuencia de ello les faltaba la generalidad del método que permite reunir en una sola fórmula todos los casos posibles, de modo que se encontraban continuamente embarazados por la consideración de numerosos casos particulares.

En la Geometría estas diferencias se acentúan más aún don-

de, como ya hemos explicado en otro lugar, basta emplear el auxilio de medios analíticos para lograr una generalidad completa y evitar la distinción de casos particulares.

Después de esta crítica general de los «Elementos» de Euclides, podemos pasar a un examen más detallado, comenzando por una *ojeada general sobre el contenido de los trece libros* o capítulos de que constan.

1.º En los libros 1 al 6 está contenida la *Planimetría*. En los cuatro primeros están las nociones sobre las *figuras geométricas fundamentales*, como segmento, ángulo, área, etc., y la *teoría de las figuras geométricas sencillas* (triángulos, paralelogramos, circunferencias, polígonos regulares, etc.), en la misma forma que hoy se acostumbra. En relación con esto, el libro segundo contiene una *Aritmética elemental y el Algebra de las magnitudes geométricas*, de tal modo que, por ejemplo, el producto $a \cdot b$ de dos segmentos a , b , es considerado como un rectángulo; cuando se trata de sumar dos de estos productos, lo cual aritméticamente es inmediato, es preciso transformar los dos rectángulos $a \cdot b$ y $c \cdot d$ en otros equivalentes y de bases iguales, para que la suma resulte un rectángulo.

El libro quinto es mucho más profundo, puesto que en él se introduce el *equivalente geométrico de los números reales positivos*, esto es, la razón $\frac{a}{b}$ de dos segmentos a y b cualesquiera, llamada por Euclides *logos* (λόγος), y del cual hablamos ya en la primera parte (t. I, pág. 37). El punto esencial de esta teoría está en la *definición de igualdad de dos razones* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ que debe ser general y válida también, por lo tanto, para el caso de que $\frac{a}{b}$ sea un número irracional en el concepto moderno; es decir, para el caso en que los segmentos a y b sean, como dice Euclides, «*asymmetroi*» esto es, *sín medida común* o *incommensurable* como después se ha traducido.

Euclides procede de la manera siguiente: Toma dos números m y n enteros, y compara las magnitudes $m \cdot a$ y $n \cdot b$, de

una parte, las $m \cdot c$ y $n \cdot d$ de otra, con lo cual resulta una de las tres relaciones :

$$m \cdot a \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} n \cdot b, \quad m \cdot c \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} n \cdot d$$

Cuando en ambas relaciones aparece siempre el mismo signo, cualesquiera que sean los números m y n elegidos, dice que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Se ve inmediatamente que este procedimiento es en esencia el mismo que el de *Dedekind* para definir el número real por una *cortadura*.

Euclides continúa después con el estudio del cálculo con igualdades entre razones, y desarrolla su renombrada *teoría de las proporciones*; es decir, una teoría geométrica de todas las transformaciones algebraicas posibles de la ecuación $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

En el tratado de Euclides la proporción se llama «*analogía*», lo que indica que el «*logos*» de dos pares de magnitudes es el mismo, concepto muchísimo más restringido que el de *proporción* que tenemos en la actualidad. Únicamente en alguna parte de la Matemática conserva todavía su primitivo significado como en las *analogías de Neper*. La *teoría de las proporciones* es un ejemplo característico de la tenacidad con que la tradición euclídea se conserva en la enseñanza geométrica, ya que en muchas, quizá en la mayor parte de las escuelas, se enseña como un *capítulo especial de la Geometría*, a pesar de que está por completo incluida en la Aritmética moderna y de que en ella se enseña dos veces; una al estudiar la regla de tres y otra en los principios del cálculo literal. Ningún motivo hay para enseñar lo mismo por tercera vez, presentándolo en una oscura forma geométrica, que de seguro resultará para el discípulo completamente ininteligible, como no sea el ajustarse por completo a las normas euclídeas. Los que tal hacen, olvidan, sin embargo, que el objeto de Euclides era sustituir así la *Aritmética* que le faltaba y que, por lo tanto, nosotros no necesitamos de tal teoría.

Esta crítica de la actual manera de tratar las proporciones,

no disminuye en nada la *importancia científica del quinto libro* de Euclides, que es tanto mayor, cuanto que en él se establece por primera vez la *licitud del cálculo con números irracionales*, sobre la base de definiciones rigurosas. Esto demuestra, que el tratado de Euclides no tiene el carácter didáctico que tan erróneamente se le ha dado, sino que, por el contrario, está destinado a lectores familiarizados con las más puras abstracciones científicas.

Es conveniente agregar aquí que, según la tradición, este quinto libro no fué escrito por Euclides, sino por *Eudoxio de Knidos* (350 antes de J. C.). Generalmente se cree que los «Elementos» no constituyeron una obra única sino una recopilación de diferentes trabajos anteriores. Realmente, acerca del autor nada de cierto se conoce, pues todas las noticias que hoy se tienen de Euclides y sus contemporáneos, no arrojan ninguna luz sobre esto. En el caso actual, la tradición se remonta al comentador de Euclides, *Proclo Diadoco*, que vivió hacia el año 450 después de J. C., es decir, más de setecientos años después, y si, por diferentes motivos, no se atribuyen caracteres de certeza a algunas de sus afirmaciones, mucho menos puede concedérseles a los que hoy intentan establecer una teoría acerca del autor de una obra escrita mil doscientos años antes.

En los *libros séptimo, octavo y noveno*, se encuentra la *teoría de los números enteros, en parte en forma geométrica*.

En esta parte, para estudiar las proporciones entre números enteros, es decir, el *cálculo con números racionales*, se expone una teoría completamente independiente de la que figura en el libro 5.º, y aunque las fracciones racionales son un simple caso particular de los números reales, para nada se relacionan las dos partes de los Elementos en que figura su estudio, lo cual hace muy difícil sostener que ambas sean del mismo autor.

Es conveniente hacer resaltar del contenido de estos libros, dos cosas que todavía tienen aplicación en la teoría de números. Una de ellas es el llamado *algoritmo de Euclides* para el cálculo del máximo común divisor de dos números a y b , que en los Elementos de Euclides se hace con segmentos, y que consiste, como es sabido, en dividir a por b , luego b por el resto

de la primera división y proseguir de este modo, según el siguiente esquema :

$$\begin{aligned} a &= m_0 \cdot b + r_1 \\ b &= m_1 \cdot r_1 + r_2 \\ r_1 &= m_2 \cdot r_2 + r_3 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

que evidentemente conduce a un número finito de divisiones, siendo el último resto el máximo común divisor.

El otro punto interesante es la demostración de la *existencia de infinitos números primos*, de la cual ya hemos hablado en la primera parte de esta obra.

En el *libro décimo* está tratada en otra forma geométrica, difícilmente comprensible, la *clasificación de los irracionales representables por raíces cuadradas*, tal y como luego ha de ser aplicada a las construcciones geométricas.

El *libro undécimo* contiene los *principios de la Estereometría*. Como vemos, Euclides no tiene nada de fusionista, ya que establece una separación absoluta entre la Geometría plana y la del espacio. Nosotros, por el contrario, manteniendo la tantas veces mencionada *tendencia fusionista*, preferimos desarrollar lo antes posible la intuición espacial acostumbrando al alumno a las figuras de tres dimensiones, en vez de limitarle artificialmente a razonar sobre el plano.

En el *libro doce* reaparecen las *consideraciones sobre magnitudes irracionales*, aplicadas a la *determinación del volumen de la pirámide* y de otros cuerpos por el llamado *método de exhaustación*, que es demostrado por el empleo de proporciones entre magnitudes irracionales; procedimiento que contiene ya, aunque de un modo implícito, el concepto de límite. Este método se aplica antes en Planimetría para demostrar que dos círculos son proporcionales a sus radios del modo siguiente: Se imaginan polígonos inscritos y circunscritos del mismo número, n , de lados, que aumente indefinidamente, de tal modo que la diferencia entre sus áreas y la del círculo pueda ser tan pequeña como se quiera, y la proporcionalidad supuesta es cierta, porque del hecho de no ser, se podría llegar fácilmente a contradecir el hecho de que todos los polígonos inscritos,

son menores que el círculo, y todos los circunscritos mayores (figura 125).

Finalmente, el *libro trece* contiene la *teoría de los poliedros regulares*, culminando con la aplicación de todo lo expuesto en los demás libros a la construcción de estos cuerpos, o mejor dicho, de la longitud de sus aristas, con la regla y el compás. Esta conclusión responde al interés especial que mostraban los filósofos griegos por todo lo que atañe a los cuerpos regulares.

Después de esta ojeada general sobre el contenido de la obra, vamos a estudiar con más detenimiento el capítulo que se refiere a los *fundamentos de la Geometría*. La meta ideal que procura alcanzar Euclides es *deducir de un modo rigurosamente lógico todas las propiedades geométricas de ciertas premisas establecidas al principio*. En la importancia de este intento re-

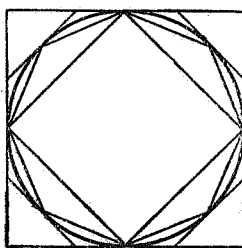


Figura 125

side la clave de la significación histórica de los «Elementos».

La prueba de que tan alto ideal no ha sido alcanzado por Euclides, es que la Ciencia moderna ha llegado a un conocimiento más profundo de los fundamentos geométricos, descubriendo en los «Elementos» muchas lagunas. Sin embargo, la tradición es tan fuerte que aún hoy día, sobre todo en Inglaterra, existen muchos que tienen el libro de Euclides como algo imposible de superar. Confundido de este modo el valor absoluto de los «Elementos» con su valor histórico, y ante tales exageraciones en su apreciación, no podrá extrañar que en la crítica que vamos a hacer, insistamos en el aspecto negativo, o sea, en los puntos en que Euclides no consigue satisfacer nuestras exigencias.

Una de las mayores dificultades de tal crítica, es la que estriba en la *inseguridad del texto*. El ya citado Proclus propor-

ciona la más remota fuente de conocimiento, pero hay que tener en cuenta que los códices más antiguos son del siglo IX después de Jesucristo, es decir, mil doscientos años más modernos que Euclides y difieren extraordinariamente unos de otros, aun en los hechos fundamentales que relatan. Por otra parte, los traductores y comentaristas latinos y árabes de Euclides, con la intención de esclarecer el texto, lo fueron modificando de tal modo que el fijar el texto que más se acerque al original de los Elementos es un problema filológico tan complicado que a él se han dedicado gran cantidad de esfuerzos y de ingenio, sin que pueda afirmarse, después de tan colosal labor filológica, sino que, en el mejor caso, el texto llegado a nuestros días puede considerarse como el *más probable*, pero de ningún modo como el verdadero original.

El texto de *Heiberg* está considerado, según opinión general, como la cumbre de la Ciencia filológica y nosotros, legos en la materia, no podemos hacer nada mejor que respetar esta opinión, tomándolo como objeto de nuestra crítica, aunque recordando siempre que tal texto pudiera no coincidir con el original.

Para entrar ya en materia, vamos a estudiar la parte del libro primero de los «Elementos», dedicada a *fundamentos de la Geometría*. Euclides enuncia en primer lugar tres grupos de proposiciones llamados por el ὄροι (*definitiones*), αἰτήματα (*postulata*) y κοινὰ ἐγγόγια (*communes animi conceptiones*), respectivamente, que podrán traducirse como *definiciones*, *postulados* y *teoremas fundamentales*. Para nombrar el último grupo, se utiliza desde Proclo la palabra *axiomas*, que como es sabido, comprende hoy en su significación, también a los postulados.

Para comprender cuál es el significado de las *definiciones*, es conveniente recordar cómo hemos empezado nosotros a fundamentar la Geometría, diciendo que ciertas cosas como puntos, rectas y planos no se podían definir, sino aceptarlas como ideas intuitivas comunes a todos los seres humanos. Únicamente enunciábamos las propiedades de ellas que después queríamos utilizar y construíamos la Geometría hasta llegar a los sistemas de coordenadas x , y , z de la analítica, lo cual nos permitió dar la noción de curva, estableciendo tres funciones

x , y , z continuas de un parámetro t . Es de notar que en esta noción estaban comprendidos los casos más extraños, como por ejemplo, el de las curvas que llenan un área.

Euclides no se resigna a proceder con tanta prudencia, pues comienza con la *definición* de todas las nociones geométricas posibles como *punto*, *línea*, *recta*, *superficie*, *plano*, *ángulo*, *circunferencia*, etc. La primera definición dice que un *punto es aquello que carece de partes*, lo cual no puede aceptarse como definición apropiada porque un punto no queda determinado por esta propiedad.

Después dice que *línea es una longitud sin ancho*, lo que no es de ningún modo cierto si se acepta la noción general de curva por nosotros indicada y que para Euclides era desconocida.

La recta la define como *una línea que se apoya uniformemente sobre sus puntos*. El sentido de esta definición es sumamente obscuro y se presta a varias interpretaciones. Una de ellas, es suponer que la frase significa que la recta conserva siempre la misma dirección, en cuyo caso es preciso aceptar la idea de dirección como primitiva. Otra interpretación sería la propiedad que tendría la recta supuesta realizada materialmente en forma de barra rígida, de coincidir consigo misma en ciertos movimientos del espacio, como el giro que la tuviera como eje y la traslación paralela a ella. De este modo hay que aceptar como concepto primitivo el de movimiento; si Euclides lo hizo así o no, es cuestión delicada sobre la cual insistiremos más adelante. De todos modos, no es posible encontrar una interpretación única ni de la definición de recta, ni de algunas otras que contiene el tratado de Euclides.

Pasemos ahora a los *postulados* tal y como están en la quinta edición de Heiberg. Los postulados consideran como posible:

- a) Trazar una recta de un punto a otro.
- b) Prolongar sin límite una recta limitada.
- c) Dados dos puntos, trazar una circunferencia que pase por uno de ellos y tenga por centro al otro.

Del cuarto prescindimos por el momento. El quinto, que es el llamado *postulado de las paralelas*, es el siguiente:

e) Si dos rectas cortadas por una tercera, forman del mismo lado de ésta, dos ángulos internos cuya suma es menor que un ángulo llano, las dos rectas prolongadas suficientemente se cortan a este lado de la secante (fig. 126).

Todos estos postulados expresan la *posibilidad de ejecutar ciertas construcciones*, o bien la *existencia de ciertas figuras geométricas* tal y como Euclides las utiliza en ulteriores consideraciones, pero en la Geometría existen otros postulados semejantes a los mencionados, que no se pueden deducir de ellos lógicamente, a pesar de lo cual, Euclides hace uso de ellos. Como ejemplo, puede servir, la afirmación de que dos circunferencias se cortan cuando cada una de ellas pasa por el centro de la otra (fig. 127). Como este ejemplo pudiéramos presentar

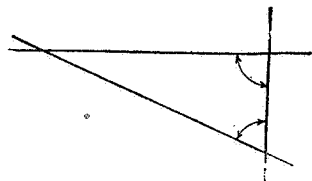


Figura 126

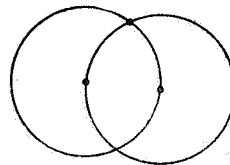


Figura 127

muchos otros que demuestran que *el sistema euclídeo de postulados es incompleto*.

El cuarto postulado, cuyo estudio hemos dejado para el último lugar, es el siguiente.

d) Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

Mucho se ha discutido, tanto la verdadera significación de este postulado, como el hecho de encontrarse en este lugar, siendo ocasionadas estas discusiones, sobre todo por la duda de si Euclides utiliza o no la *noción de movimiento*. Si ésta se acepta como primitiva, como hemos hecho nosotros en nuestro primer método de fundamentar la Geometría, la propiedad de ser iguales todos los ángulos rectos resulta como una consecuencia lógica necesaria, y no puede tener su puesto entre los postulados. Algunos comentadores, fundándose en que Euclides no hace mención explícita del movimiento en las proposiciones fundamentales, opinan que el postulado cuarto, tiene

precisamente por objeto *introducir la noción de movimiento*, como debe ser admitida para lo sucesivo, aunque de un modo algo incompleto.

Otro grupo de comentadores que forma la mayoría, cree, por el contrario, que una de las tendencias más esenciales de Euclides, es desterrar de la Geometría la noción de movimiento, pero para ello le sería preciso colocar en primer término el *concepto abstracto de congruencia*, como hemos hecho nosotros en nuestro segundo modo de fundamentar la Geometría. En este caso el postulado cuarto sería la *base de la teoría de la congruencia*, pero entonces podría preguntarse por qué no hace consideraciones análogas sobre la congruencia de segmentos.

Tanto aceptando una como otra de las dos interpretaciones del método de Euclides, se presentan en su desarrollo grandes dificultades como vamos a ver.

Ninguna de las dos hipótesis logra explicar por qué la proposición relativa a los ángulos rectos se encuentra entre los *postulados* con su caracterizada tendencia general. Zeuthen, en su Historia de la Matemática, ya citada, ha intentado hacerlo con la siguiente explicación que no logra convencer por completo: El postulado quiere decir que la prolongación de un segmento, que el postulado *b)* hace posible, está *unívocamente determinada*. Hay, por otra parte; que admitir que muy bien pudiera tratarse aquí y en otros puntos de una *corrupción del texto original*.

Pasemos ahora a las *proposiciones fundamentales* o *axiomas*, que, según Heiberg, son los cinco siguientes:

a) Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí; si $a=b$ y $b=c$, será $a=c$.

b) Si a dos cosas iguales se les aumentan otras dos también iguales, se obtienen sumas iguales. Si $a=b$ y $c=d$, será $a+c=b+d$.

c) Si $a=b$ y $c=d$, será $a-c=b-d$.

d) Dos cosas que coinciden son iguales.

e) El todo es mayor que sus partes: $a > a-b$.

Cuatro de estas proposiciones son de naturaleza lógica y válidas para todas las magnitudes geométricas que después se es-

tudian (segmentos, ángulos, áreas, etc.); la cuarta expresa que la *congruencia* o *superponibilidad* ha de servir de criterio para la igualdad y la desigualdad, pero deja subsistir la duda de si se presupone o no la noción del movimiento.

En cuanto a la *distinción entre axiomas y postulados*, *Simon* la advierte en que aquéllos expresan las más elementales *propiedades lógicas*, y éstos los hechos que se refieren a la *intuición* espacial. Esta opinión tendría gran verosimilitud si la distribución y el orden dados por Heiberg fuesen los originales, pero desgraciadamente las diversas ediciones de Euclides difieren demasiado, tanto en el contenido de los postulados y axiomas como en el orden en que se encuentran; así por ejemplo, el postulado de las paralelas se suele dar frecuentemente como axioma 11.

Pasemos ahora a verificar un examen más detallado del edi-

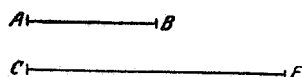


Figura 128

ficio geométrico construido por Euclides sobre este sistema de postulados, definiciones y axiomas, comenzando por los cuatro párrafos que siguen a los axiomas. Simultáneamente haremos algunas observaciones interesantes, tanto respecto al concepto que Euclides tiene de los fundamentos, como al lugar que a la noción de movimiento concede en su tratado.

Los tres primeros párrafos tiene por objeto la resolución del siguiente problema: *Llevar un segmento dado AB sobre otro CD, a partir de uno de sus extremos C*. Naturalmente, esta construcción puede hacerla prácticamente cualquiera por medio de un compás o de una tira de papel, es decir, por el movimiento de un cuerpo rígido sobre el plano, pero Euclides procede de otro modo en sus consideraciones teóricas. En sus postulados no existe nada que corresponda al hecho experimental del libre movimiento de un compás, puesto que el postulado c) permite solamente trazar una circunferencia dados uno de sus puntos y el centro; así es que, como se limita siem-

pre a apoyarse sólo en las propiedades enunciadas, le es preciso para hacer una construcción en apariencia tan sencilla, descomponerla en la serie de complicadas construcciones previas que vamos a indicar.

1.^a *Construir un triángulo equilátero sobre un segmento*

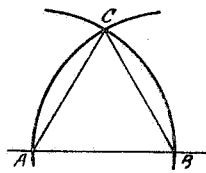


Figura 129

dado (fig. 129). Según el postulado *c*) se pueden trazar con radio AB dos circunferencias, una con centro A y otra con centro B . El hecho de cortarse estas dos circunferencias es admitido por Euclides, como ya dijimos, sin la menor explicación. En cambio, da después una rigurosa demostración lógica, con

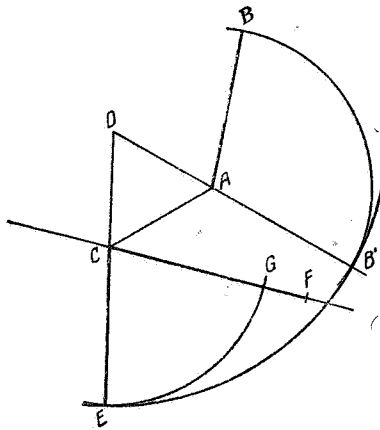


Figura 130

auxilio de las axiomas, de que el triángulo ABC es efectivamente equilátero.

2.^a *Tomar un segmento, a partir de un punto C (fig. 130) que sea igual a un segmento dado AB . Se construye sobre AC*

un triángulo equilátero ACD , se prolonga DA más allá de A (postulado b) y se describe una circunferencia con centro A y radio AB , hasta que corte en B' a la prolongación de AD . La existencia del punto B' de intersección se admite implícitamente sin demostración alguna. Después se traza otra circunferencia de centro D y radio DB' , hasta cortar en E a la prolongación de DC , con lo cual se obtiene el segmento CE igual al lado AB . A la construcción sigue la demostración rigurosa de que $CE=AB$, la cual no es preciso copiar, ya que la construcción misma indica su encadenamiento.

3.º *Dados dos segmentos AB y CF , llevar sobre el CF , a partir de C , un segmento igual al $AB < CF$.* Aplicando la construcción anterior se toma a partir de C un segmento $CE=AB$. Trazando una circunferencia de centro C y radio CE , ésta corta a CF en el punto G que es el extremo del segmento buscado, con lo cual queda resuelto el problema que el autor se proponía.

Después de resuelto el problema, y como número 4.º, establece Euclides el *primer teorema de congruencia* enunciado del siguiente modo: *Dados dos triángulos ABC y $A'B'C'$, si dos lados del primero son iguales a dos del segundo ($AB=A'B'$, $AC=A'C'$) y el ángulo comprendido por aquéllos es igual al comprendido por éstos ($A=A'$), los dos triángulos tienen respectivamente iguales todos sus elementos.* Para demostrar-

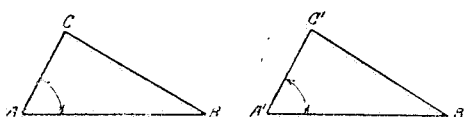


Figura 131

lo, imagina colocado el triángulo $A'B'C'$ sobre el ABC , de modo que, $A'B'$ coincida con AB , $A'C'$ con AC , y el ángulo A' con el A . Es digno de notarse que esta demostración supone una grave *inconsecuencia en el método*; en efecto, hemos visto con qué rigor se demuestra que un segmento puede llevarse sobre otro a partir de uno de sus extremos, en cambio, el autor no dice absolutamente nada respecto al transporte del

ángulo, utilizado como el del segmento, en la demostración del teorema de congruencia. Tampoco se menciona la razón de que el tercer lado $B'C'$ continúe siendo una recta después del transporte. Claro está, que ello es intuitivamente cierto, pero hay que tener en cuenta que el principal objetivo de Euclides es obtener deducciones completamente *lógicas* y en este punto no es consecuente con sus propósitos. En realidad lo que hace Euclides, es suponer implícitamente la posibilidad del movimiento de las figuras geométricas, sin alteración de su magnitud ni de su forma, o sea, lo que nosotros hemos llamado postulado del movimiento, en nuestro primer ensayo de fundamentar la Geometría.

Esta demostración parece indicar que puede incluirse a Euclides entre los que aceptan como legítima la idea de movimiento; sin embargo, es de extrañar que no la haya mencionado en los fundamentos. Además, en caso de aceptar dicha idea, las artificiosas construcciones 2.^a y 3.^a carecerían en absoluto de objeto ya que con la noción de movimiento son inmediatas.

Aunque supongamos que la citada demostración del texto de Euclides representa una alteración del texto original, no dejará de haber una *laguna importante* en su sistema, puesto que sin aceptar como primitiva la idea de movimiento no se puede demostrar el primer teorema de congruencia y es preciso admitirle en forma de axioma como hemos hecho nosotros en nuestro segundo sistema de fundamentar la Geometría. Podemos afirmar, por lo tanto, que *en el primer libro de Euclides existen tantos defectos esenciales que de ningún modo puede considerarse como la completa satisfacción de un ideal.*

Puede oponerse a los fundamentos de la Geometría de Euclides, una objeción mucho más poderosa que las lagunas y oscuridades que hemos hecho resaltar. Euclides establece una especie de Geometría analítica en la cual todas las magnitudes geométricas (segmentos, ángulos, áreas, etc.), están consideradas únicamente en valor absoluto, sin que jamás intervenga un signo. El resultado de esto es que muchas veces no puede llegar a enunciar proposiciones generales, sino que precisa distinguir entre varios casos particulares referentes a las diversas

posiciones en que pueden estar las partes que componen una figura. Un ejemplo sencillo lo constituye la generalización del teorema de Pitágoras (fig. 132), que usando la notación moderna se expresa así :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

fórmula completamente general, ya que $\cos \gamma$ es positivo o negativo según que C sea agudo u obtuso. Euclides, en cambio,

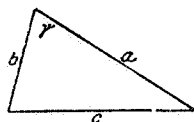


Figura 132

como sólo considera el valor absoluto ($\cos \gamma$), necesita establecer una fórmula para cada caso :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab |\cos \gamma| \quad \text{y} \quad c^2 = a^2 + b^2 + 2ab |\cos \gamma| .$$

No es preciso decir que cuanto más se avanza, más se complican las dificultades debidas a la distinción de casos particulares.

Estas deficiencias relativas al signo, pueden naturalmente establecerse *geoméricamente*. A la diferencia de signos en la exposición analítica corresponde en la Geometría pura una *distinción en el orden* de este tipo: «si un punto C está entre A y B , o bien fuera del segmento AB ». Para evitar esos inconvenientes y efectuar una construcción completamente lógica, deben formularse expresamente los llamados *axiomas de ordenación* que expresan tales relaciones de posición, como lo hemos hecho en nuestros dos sistemas de construir la Geometría. Cuando dichos axiomas faltan, como ocurre en el tratado de Euclides, el ideal del encadenamiento rigurosamente lógico no puede ser alcanzado. *Nuestra objeción principal contra Euclides consiste, pues, en que su Geometría carece de axiomas de ordenación.*

El reconocimiento de la necesidad de enunciar ciertas hipó-

tesis sobre el orden de los elementos en las figuras geométricas, es de fecha relativamente reciente. El primero que trató de un modo consecuente las cuestiones relativas a la aplicación del signo en Geometría, fué *Möbius* en su «*Cálculo Baricéntrico*» publicado en 1827. En el aspecto geométrico puro de la cuestión, la primera mención que existe está contenida en una carta de *Gauss* a *W. Bolyai*, de 6 de marzo de 1832, que dice: «Para un desarrollo completo, ciertas palabras como «entre», debieran representar nociones claramente definidas, pero esto no lo encuentro en ninguna parte.»

La primera formulación precisa de estos axiomas de orde-

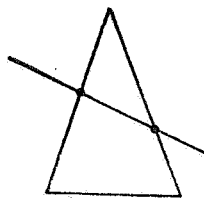


Figura 133

nación fué dada en 1882 por *Pasch* en sus «*Lecciones sobre Geometría moderna*» (*). En esta obra aparece por primera vez el axioma por nosotros utilizado en la primera fundamentación de la Geometría: *Si una recta corta a un lado de un triángulo, necesariamente corta a uno de los otros dos* (fig. 133).

No puede rebajarse el valor de estos axiomas; son tan importantes como todos los demás, si realmente quiere construirse la Geometría como ciencia lógica, de manera que una vez establecidos los axiomas no necesita nuevos llamamientos a la intuición, ni figuras.

Como *Euclides* no utiliza estos axiomas, necesita constantemente la distinción de casos particulares, y, por otra parte, como tampoco insiste en la conveniencia de la exactitud y precisión del dibujo geométrico, cae en el peligro de que alguno de

(*) La primera edición es de 1882; hay otra de 1912. En castellano hay una traducción debida a *Alvarez Ude* y *Rey Pastor*, de 1912.

sus discípulos llegue a consecuencias *falsas* razonando sobre figuras mal dibujadas. Así han nacido todos los numerosos *sosfismas geométricos*, que consisten en demostrar correctamente proposiciones falsas, sobre la base de figuras en las que los axiomas de ordenación no se han tenido en cuenta. A modo de ejemplo vamos a *demostrar que todo triángulo es isósceles*.

Tracemos la bisectriz del ángulo A (fig. 134), y la perpendicular en el punto medio D del lado BC . Si ambas fuesen paralelas, la bisectriz sería perpendicular a BC y el triángulo isósceles, como es fácil de probar. Supongamos, pues, que no sean paralelas y distingamos dos casos según que su punto O de intersección esté dentro o fuera del triángulo. Tracemos en

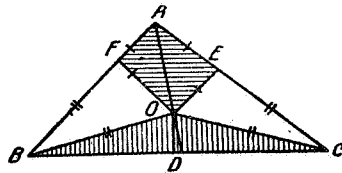


Figura 134

ambos casos OE y OF perpendiculares a AC y AB , respectivamente, y unamos O con B y C .

En el primer caso (fig. 134), los triángulos AOF y AOE , rayados horizontalmente en la figura, son congruentes por tener un lado OA común, los ángulos en A iguales y ser rectángulos. Por lo tanto,

$$AF = AE.$$

Los triángulos OCD y OBD , rayados verticalmente, son también congruentes, por ser rectángulos y tener OD común y $DC = DB$, luego, $OC = OB$. De esta igualdad y de la $OE = OF$ que resulta de la congruencia de los dos primeros, se deduce que los triángulos sin rayar OCE y OBF son congruentes, y, por consiguiente,

$$FB = EC.$$

Sumando las dos igualdades obtenidas resulta :

$$AC = AB,$$

como queríamos demostrar.

Si el punto O está fuera del triángulo (fig. 135), podemos establecer del mismo modo la congruencia de los tres pares de triángulos correspondientes, y resultarán las igualdades :

$$AF = AE, \quad FB = CE,$$

de las cuales por substracción obtendremos :

$$AB = AC,$$

que demuestra que el triángulo es isósceles.

Lo único falso de esta demostración es la figura. En primer

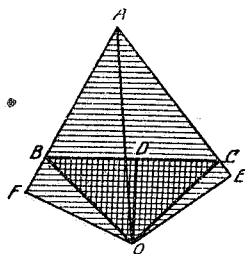


Figura 135

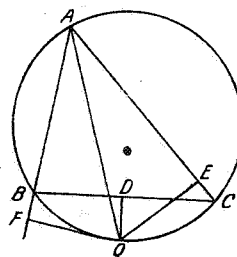


Figura 136

lugar, el punto O no puede estar nunca en el interior del triángulo, lo que elimina la posibilidad del primer caso. Tampoco es lícito dibujar la figura del modo que lo hemos hecho para demostrar el segundo caso, puesto que se verifica siempre que uno de los pies, E, F , de las perpendiculares, está en uno de los lados y el otro en la prolongación del otro lado (fig. 136), y por lo tanto, que :

$$AB = AF - BF$$

$$AC = AE + CE = AF + BF,$$

de las cuales no se puede sacar la consecuencia buscada.

Así queda explicado el sofisma, de un modo análogo a como pueden explicarse muchas otras demostraciones aparentes que tan conocidas son, y que están fundadas en un orden falso de los puntos y rectas que forman la figura.

Así como no podemos menos de criticar estos esenciales defectos de la exposición de Euclides, vamos a hacer resaltar en cambio uno de sus aciertos más brillantes. En el quinto libro se estudia, como ya dijimos, la *razón* (logos), de dos magnitudes geométricas homogéneas a y b , lo que equivale a dar la noción general de número. Euclides no establece esta razón sin indicar que para ello es preciso *que puedan existir dos números enteros m y n , tales que $ma > b$ y $a < nb$* , siendo sus palabras textuales éstas: «*Dos magnitudes tienen razón cuando un múltiplo de cada una puede ser mayor que la otra.*» Esta condición se designa actualmente con el nombre de *axioma de Arquímedes*, evidentemente impropio, puesto que Euclides estuvo en posesión de este axioma mucho tiempo antes que Arquímedes, y antes todavía que Euclides probablemente *Eudoxio*, por lo cual hoy va abriéndose camino la denominación de *principio de Eudoxio*.

Este axioma aparece como uno de los más importantes postulados de continuidad en las modernas investigaciones sobre fundamentos de la Geometría y de la Aritmética. Con él coincide, como se ve inmediatamente, el postulado que dimos en nuestra primera fundamentación de la Geometría, que dice que por repetición de un segmento de una semirrecta se puede alcanzar o pasar cualquier punto de ella. También hemos hablado de este postulado en el primer tomo de esta obra, cuando dijimos que una magnitud r recibe el nombre de *infinitamente pequeño actual respecto a otra b* (o, recíprocamente, *b , infinitamente grande actual respecto a la a*), cuando multiplicándola por cualquier número finito el producto se conserva siempre inferior a b . Euclides, al adoptar tal sistema de magnitudes geométricas, excluye completamente la consideración de infinitamente pequeños e infinitamente grandes actuales, exclusión imprescindible para su teoría de las proporciones, ya que ésta no es otra cosa, como hemos hecho notar, que una forma de la moderna teoría de números irracionales. Euclides (o bien Eu-

doxio), procede— y esto es lo más admirable—del mismo modo que se ha procedido en las investigaciones modernas sobre la noción de número y utiliza exactamente los mismos medios auxiliares.

Para mejor ver la importancia del *axioma de Arquímedes* vamos a fijarnos en *un sistema concreto de magnitudes que no satisfacen a dicho axioma*, interesantes además por lo estudiadas que han sido en la antigüedad y en la edad media. Nos referimos a los *ángulos corniformes* que son *ángulos curvilíneos*, tomando la palabra ángulo en una acepción distinta de la corriente hoy en Matemáticas.

Lo que actualmente se llama ángulo de dos curvas es, como todos saben, el ángulo de sus tangentes en el punto de intersección (fig. 137) así, por ejemplo, el ángulo de una circunferencia con su tangente es nulo. Los ángulos así definidos consi-

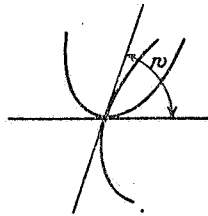


Figura 137

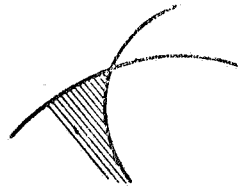


Figura 138

tituyen un sistema de magnitudes perfectamente *arquimediario* al que puede aplicarse la teoría euclídea de las proporciones y medirse empleando los números reales.

Nosotros por el contrario vamos a llamar *ángulo corniforme de dos curvas* (limitándonos como los antiguos a circunferencias y rectas), a la parte de *superficie limitada* por ellas en las proximidades de su punto de intersección o de contacto y vamos a comprobar que estas magnitudes forman un sistema *no arquimediario*, es decir, que no satisface al axioma de Arquímedes. Limitémonos a considerar los ángulos que tengan como lado *una recta fija*, que tomaremos como eje x , el vértice en el origen O_1 y el otro lado sea una circunferencia (que, como caso particular, puede ser una recta), que corta o toca en el origen O al eje x . Dados dos de estos ángulos, llamaremos (figura 138) *menor* a aquel de ellos *que en las proximidades del*

punto O tenga su lado curvilíneo entre la recta y el lado curvilíneo del otro, es decir, a aquel que límite una superficie más estrecha. Según esto, el ángulo que forme una circunferencia tangente a la recta dada, será menor que el de una circunferencia secante y que el de una recta. De dos circunferencias tangentes formará menor ángulo, aquélla que tenga mayor radio. Según este convenio, dados dos ángulos se podrá afirmar siempre cuál es el mayor y cuál el menor de ellos; es decir, adoptando la terminología de la moderna teoría de conjuntos, el sistema de magnitudes estará *ordenado* tal y como lo está el conjunto de los números reales. Existe, sin embargo, una diferencia entre ambos modos de ordenar, y para ponerla de manifiesto vamos a fijar principios precisos que permitan la me-

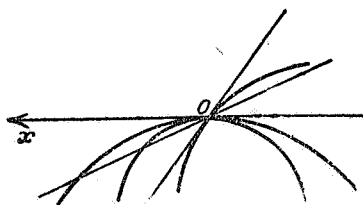


Figura 139

dición de *ángulos corniformes*. El primero es que se mida el ángulo de una *recta* que pasa por O con las unidades de medida ordinarias; resulta entonces, según el convenio establecido, que todo ángulo a formado por la recta dada y una circunferencia tangente a ella, es menor que cualquier ángulo rectilíneo por pequeño que éste sea. Esto que en el continuo numérico no ocurre a ningún número diferente de cero, caracteriza el ángulo a como un *infinitamente pequeño actual*.

Para seguir refiriéndonos al *axioma de Arquímedes*, es preciso definir la *multiplicación de un ángulo curvilíneo por un número entero*. Consideremos en primer lugar, una circunferencia de radio R y tangente en O y diremos que el ángulo formado por otra circunferencia tangente en O a la recta dada es n veces mayor cuando su radio sea $\frac{R}{n}$. Esto está de acuerdo con la definición dada, según la cual, los ángulos formados por cir-

cunferencias que tengan por radios $R, \frac{R}{2}, \frac{R}{3} \dots$, serán cada vez mayores. Como múltiplos de los ángulos formados por circunferencias tangentes, se obtienen así otros análogos, que serán constantemente menores que cualquier ángulo formado por una circunferencia secante, por pequeño que éste sea (fig. 140). Estos ángulos no satisfacen, pues, al *axioma de Arquímedes*, y son infinitamente pequeños actuales, respecto al formado por cualquier circunferencia secante.

La *adición general* de tales ángulos quedará definida como consecuencia de la definición de la multiplicación. Para sumar dos ángulos bastará sumar los valores recíprocos de los radios de sus respectivas circunferencias, ya que estos valores representan las medidas de dichos infinitamente pequeños actuales.

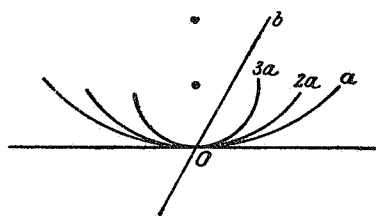


Figura 140

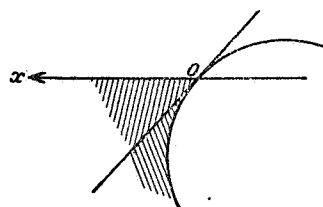


Figura 141

Consideremos ahora una *circunferencia cualquiera secante* en O (fig. 141). Podemos definir el ángulo que forma con el eje x , como suma del ángulo que la circunferencia forma con su tangente en O , y el de ésta con la recta dada. Ello nos permite referir la suma y producto de ángulos de esta clase, a operaciones con los sumandos que los componen, y fundamentar así el cálculo general de ángulos corniformes.

Este sistema de magnitudes geométricas no satisface al axioma de Arquímedes, y por consiguiente no pueden representarse por *logos* o números reales. Es muy probable que esto fuera ya conocido por Euclides (o Eudoxio) y, por ello, para excluirlas adoptase el famoso axioma.

El conjunto de ángulos corniformes puede ser ampliado

utilizando los modernos procedimientos, con lo cual se generalizan y al mismo tiempo se simplifican las definiciones. Basta para ello considerar *todas las curvas analíticas que pasan por O*, cada una de las cuales está representada por una serie de potencias :

$$y_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x^2 + \gamma_1 x^3 + \dots, \quad y_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x^2 + \gamma_2 x^3 + \dots$$

Diremos que el ángulo que forma la curva 1 con el eje x es mayor que el que forma la curva 2, cuando sea $\alpha_1 > \alpha_2$. Si fuese $\alpha_1 = \alpha_2$, compararíamos β_1 con β_2 , y así sucesivamente. De este modo *queda ordenado el conjunto de los ángulos que todas las curvas analíticas forman con la recta dada*, de tal modo que los formados por circunferencias quedan ordenados del mismo modo que antes. Llamaremos ahora múltiplo según n del ángulo 1, al ángulo formado por la curva cuya serie representativa es

$$y_1 = n \alpha_1 x + n \beta_1 x^2 + n \gamma_1 x^3 + \dots$$

En el caso particular de la circunferencia, la operación que hemos hecho para multiplicar por n , no coincide exactamente con ésta, pues el sustituir el radio R por el $\frac{R}{n}$ se pasa de

$$y = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} + \dots$$

a

$$y = n \frac{x^2}{2R} + n^3 \frac{x^4}{8R^3} + \dots$$

con lo cual, solamente el primer término del desarrollo queda multiplicado por n , pues los demás lo son por n^2 , n^3 , etc. Ello nos demuestra que este es otro sistema de magnitudes *no arquimedianas*, puesto que toda curva cuya serie representativa empiece por x^2 ($\alpha_1 = 0$), forma un ángulo cuyos múltiplos son

siempre menores que los ángulos formados por otra curva cuya serie tenga término en x . Esto no es en el fondo más que una forma intuitiva de lo que ya dijimos en la primera parte de este libro a saber: Que en la serie:

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \dots$$

las potencias sucesivas x , x^2 , x^3 , ..., desempeñan el papel de infinitamente pequeños de orden progresivamente creciente.

Si se quiere proseguir el estudio de los ángulos corniformes utilizando *curvas no analíticas*, es preciso para que la comparación de magnitudes sea lícita, abstenerse de operar con curvas que corten infinitas veces a una curva analítica, en el entorno de uno de sus puntos. Un ejemplo de ángulos formados con curvas no analíticas es el de la que está representada por la función $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ que tiene, como es sabido la propiedad de que todos sus cocientes diferenciales son nulos para $x=0$. Esta curva queda *por debajo* de todas las curvas analíticas, y *el ángulo que forma, así como todos sus múltiplos, es menor que el ángulo formado por cualquier curva analítica.*

Terminado nuestro estudio crítico del tratado de Euclides, resumiremos lo dicho en las siguientes conclusiones:

1. La *gran importancia histórica* de los «Elementos» consiste en haber establecido en lo sucesivo *como ideal de la Geometría el alcanzar un encadenamiento lógico perfecto.*
2. En lo que se refiere al modo de acercarse a este ideal, hay que reconocer muchos aciertos, pero en cambio *hay muchas cosas que están por debajo de nuestro actual punto de vista.*
3. Numerosos *detalles esenciales*, especialmente del primer libro, son dudosos a causa de la *inseguridad* del texto.
4. La carencia de una *Aritmética utilizable*, hace adolecer la exposición de *complicaciones innecesarias.*
5. La comprensión del contenido total y de la dependencia

entre las diversas partes, se hace difícil a causa de estar exclusivamente acentuado el *aspecto lógico*.

Nuestra propia posición respecto a los fundamentos de la Geometría, puede caracterizarse por dos conceptos de que hemos hecho uso frecuente y sobre los cuales queremos insistir ahora.

El uno se refiere al hecho de que la Geometría puede ser construida siguiendo caminos muy diversos; de ellos hemos considerado dos con algún detalle. El primero se basaba en el concepto de grupo de movimientos, y, en particular, en el de las traslaciones; el otro comenzaba en los axiomas de congruencia y sólo muy tarde aparecía el de paralelismo. Este contraste demuestra la libertad con que puede procederse en la Axiomática de la Geometría y la poca razón con que se expresan algunos intransigentes al afirmar de un modo *absoluto* que tal o cual sistema de axiomas, apropiado a sus gustos, es el más simple y único en que puede fundarse la Geometría. La verdad es que el origen de todos los conceptos fundamentales y axiomas es la intuición geométrica sensible; de ella tomamos los datos que, mediante una abstracción adecuada, sirven para ser tratados lógicamente. Pero nada hay que diga cómo debe hacerse la elección; la libertad de ella sólo está limitada por la condición de que el sistema de axiomas cumpla su cometido, es decir, que con él, sin ningún nuevo llamamiento a la intuición, pueda edificarse sin lagunas Geometría.

Otra observación se refiere a nuestra posición respecto de la Geometría analítica y a la crítica de ciertas tradiciones de Euclides que no se acomodan ya al estado de la ciencia matemática y, por consiguiente, deberían proscribirse de la enseñanza. En Euclides, la Geometría, gracias a sus axiomas, es el fundamento riguroso de la Aritmética general, que también comprende la de los números irracionales. En esta posición de dependencia de la Geometría se ha mantenido la Aritmética hasta el siglo XIX, en que la situación ha sufrido un completo cambio. Hoy es a la Aritmética a la que corresponde, por derecho propio, el papel de disciplina fundamental, y éste es un hecho que no hay más remedio que tener en cuenta: cuando se quiere

construir científicamente la Geometría, ha de hacerse apoyándose en los resultados del Análisis. En este sentido está justificada la posición que, respecto de la Geometría analítica, hemos trazado en la fundamentación, sirviéndonos siempre para el estudio de las cuestiones geométricas de los recursos del Análisis.

Terminado con esto lo que nos proponíamos decir sobre las teorías de la Geometría pura, que creemos basta para formarse idea de su conjunto, suficiente para las necesidades de la enseñanza media, vamos a tratar ya de esta misma enseñanza geométrica.
